



Theoretisch-praktische Abhandlung

über

Anordnung und Construction

der

Sprengwerke von grosser Spannweite

mit besonderer Beziehung

auf Dach- und Brücken-Constructionen aus geraden Theilen, aus Bögen, oder aus der Verbindung beider,

für praktische Baumeister so wie für Vorträge über Ingenieur-Mechanik

von

P. Ardant,

Ingenieur-Capitain, Professor der Baukunst und Constructionslehre an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Mitglied der Königlichen Akademie zu Metz.

Auf Befehl des Französischen Kriegsministeriums gedruckte Abhandlung.

Deutsch herausgegeben

von

Aug. von Kaven,

Bau-Conducteur in Bremen und Königl. Hannov. geprüfter Eisenbahn-Techniker.

Mit einer Vorrede

von

Dr. Moritz Rühlmann,

Professor an der Königlichen Bau- und höheren Gewerbe-Schule zu Hannover

Mit einem Atlas von 28 Tafeln und in den Text gedruckten Holzschnitten.

Hannover.

Hahn'sche Hof-Buchhandlung.

1847.

Schrift und Druck von Fr Culemann

Sr. Hochwohlgeboren

dem

Herrn Regierungsrathe Hoppenstedt,

Ritter des Königlich Hannoverschen Guelphenordens, des Königlich Preufsischen Rothen Adlerordens und des Herzoglich Braunschweigischen Ordens Heinrichs des Löwen,

und

Sr. Hochwohlgeboren

dem

Herrn Baurathe Mohn,

Inhaber des Königlich Hannoverschen Guelphenordens 4ter Classe, technisches Mitglied der Königlichen Eisenbahn-Direction,

den hohen Förderern der rationellen Technik, widmet diese Erstlinge technischer Literatur, als ein schwaches Zeichen seiner gröfsten Verehrung

Aug. v. Kaven.

Vorwort.

Gegenwärtiges Werk wurde von mir bereits seit dem Jahre 1845 bei den Vorträgen benutzt, welche ich über Mechanik der Baukunst an der mit der höheren Gewerbeschule in Hannover verbundenen Bauschule zu halten habe, und wobei ich den praktischen Werth desselben derartig schätzen lernte, dafs es mir zur wahren Freude gereichte, als ich am Ende des verflossenen Jahres einen meiner talentvollsten Zuhörer, Herrn v. Kaven, gegenwärtig Bau-Conducteur in Bremen, zu bewegen vermochte, dasselbe in die deutsche Sprache zu übertragen, um dadurch die fernere Benutzung des Werkes allgemeiner und den Ankaufspreis billiger zu machen.

Dem Wunsche des Herrn Verlegers, eine Vorrede zu diesem Werke zu schreiben, komme ich zwar gern nach, glaube jedoch, dafs solche mindestens als eine Art von Lockspeise nicht nöthig gewesen wäre, da, ungeachtet der gegenwärtigen Uebersetzungswuth fremder Productionen, eine Arbeit, wie die hier von Ardant gelieferte, sich von selbst Eingang bei allen Sachkennern und Betheiligten verschafft haben würde.

Ich benutze daher die Erfüllung des gedachten Wunsches mehr und besonders dazu, in gedrängter Kürze den Standpunkt zu beleuchten, auf welchem sich der von Ardant behandelte Gegenstand zeither befand, auch daran einige vielleicht nicht ganz werthlose Bemerkungen zu knüpfen.

So weit ein fleifsiges Studium der Werke über Mechanik der Baukunst zu einem Urtheile zu befähigen vermag, glaube ich behaupten zu können, dafs dem seligen Navier in seinem Werke „Resumé des Leçons données a l'école des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique, Paris, 1826 und 1838, Première Partie", allein der Ruhm gebührt, zuerst die nothwendigen Elemente zur Beantwortung der bei gröfseren aus geraden und krummen Hölzern gebildeten Gespärren vorkommenden Fragen auf eine sachgemäfse und vor allem praktische Weise geliefert zu haben, so wie Ardant als der Erste zu bezeichnen sein dürfte, welcher nicht nur Navier's Idee vollständig begriffen, sondern sie auch fruchtbar zu machen verstanden hat. Letzteres zeigt Ardant namentlich auch dadurch, dafs er Navier's

analytische Entwickelungen auch auf Fälle anwendet, welche von Navier selbst gar nicht beachtet wurden.

Was nun in genannter Hinsicht zuerst die aus geraden Hölzern gebildeten Gespärre betrifft, so verfolgte man in Deutschland gewöhnlich den von Eytelwein, in seiner Statik im Artikel: „Statik der gebräuchlichsten Holzverbindungen", eingeschlagenen Weg, wobei die Hölzer im Allgemeinen als steife, harte Körper betrachtet, Biegung, Setzen an den Stöfsen und Verbindungsstellen etc. vernachlässigt und nur dann auf Elasticität Rücksicht genommen wurde, wenn es sich darum handelte, Drücke zu berechnen, welche die Stützpunkte gerader Balken erfahren, sobald die Zahl der ersteren gröfser als zwei ist. Eine nächste Folge hiervon war, dafs man das Zusammendrücken in den Stöfsen, Setzen hölzerner Gespärre und nicht minder den Schub, welche Holzverbindungen ohne Zugstangen oder Durchzüge auf die Stützmauern ausüben etc. nicht durch Formeln auszudrücken vermochte, welche nur einigermafsen den Anforderungen entsprechend gewesen wären.

Bei den aus krummen Hölzern (Bogenbalken, Bohlenbögen etc.) gebildeten Verbindungen fehlte es aber in den deutschen Werken über Mechanik der Baukunst durchaus und gänzlich an jeder theoretischen für den Praktiker brauchbaren Auffassung.

Die in Funk's, sonst werthvollen Abhandlung: „Ueber die vorzügliche Anwendbarkeit der Bohlenbögen zu hölzernen Brücken etc.," Rinteln, 1812, zur Berechnung des Tragvermögens der Bohlenbögen aufgestellte Formel $m \frac{bh^2}{l} \sin \varphi$ (wo φ den Winkel bezeichnet, welche die Sehne des halben Bogens mit der Horizontale bildet) ist unmittelbar den Sätzen über den Bruchwiderstand gerader Hölzer entlehnt, und ist gewifs von Niemanden für etwas Anderes als eine Aushülfe, bei dem beklagenswerthen Zustande des Mangels an etwas Besserem, betrachtet worden. Welches Vertrauen der Funk'schen Formel, selbst von letzterem Gesichtspunkte aus, beizumessen ist, kann man unter andern aus der schätzbaren Arbeit des verstorbenen Bau-Inspectors Zimmermann in Lippstadt (Crelle's Journal f. d. Baukunst. Band 3. S. 367) entnehmen.

Langsdorf in seiner „Anleitung zum Strafsen- und Brückenbau," Mannheim und Heidelberg, 1817, leitet ebenfalls die Formeln zur

Berechnung der Tragfähigkeit, Durchbiegung etc. künstlich gebogener Hölzer unmittelbar aus den betreffenden Sätzen für gerade Hölzer ab, und nennt ohne weiteres §. 155 und §. 164 (Note) die theoretische Beantwortung der für die Statik der Holzbögen wichtigsten Fragen eine ganz vergebliche Bemühung!

Die erste deutsche, theoretische Behandlung des fraglichen Gegenstandes hat der Würtembergische Artillerie-Hauptmann v. Heim geliefert, und zwar in seinem Werke: „Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung gespannter elastischer Körper", Stuttgart, 1838, woselbst das 5. Capitel speciell vom Gleichgewichte elastisch fester Körper mit ursprünglich krummer Centrallinie handelt.

So höchst anerkennungswerth aber auch diese Abhandlung als eine Weiterführung der in dieser Hinsicht von Euler, Lagrange u. A. gelieferten Arbeiten, ist, so wenig ist sie jedoch im Stande in der dargestellten Weise dem Praktiker irgend einen erheblichen Nutzen zu gewähren. Fast dasselbe Urtheil mufs über eine an sich auch brave Arbeit eines Herrn Ortmann in Meiningen „Theorie des Widerstandes fester elastischer Körper" in Förster's Bauzeitung, Jahrg. 1843, S. 408 gefällt werden, wo in den letzten Paragraphen der ersten Abtheilung die Grundlagen zu einer Theorie gekrümmter Träger gegeben wird. Auffallend ist hierbei, dafs Herr Ortmann weder Navier's noch Heim's Arbeiten zu kennen scheint, da er S. 432 u. a. O. ausdrücklich hervorhebt: „dafs diese Theorie der Bauwissenschaft bis jetzt gefehlt habe*).

Wie gänzlich unbekannt übrigens manchen deutschen Männern vom Fache Navier's für die praktische Anwendung höchst geeigneten analytischen Darstellungen des Widerstandes der Materialien überhaupt sind, davon giebt unter andern Brix in einem Aufsatze: „Ueber die Dehnung und das Zerreissen prismatischer Körper, wenn die spannende Kraft seitwärts der Schwerpunktsaxe wirkt", in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleifses in Preufsen, Jahrgang 1845, einen

*) In der Englischen Literatur sieht es in gedachter Beziehung nicht besser aus als in der Deutschen, wenn man besonders Mosely's jüngstes Werk „Mechanical Principles of Engineering etc." ausser Betracht lässt. Wie sehr deshalb die Engländer Navier's Werk achten, davon zeugt so wohl Mosely als besonders Hann in seiner „Theorie of Bridges." London, 1843, der in einer Note Seite 35 sagt: „This (Navier's) admirable Work should be used in every school that is at all interested in the progress of science applied to the arts."

auffallenden Beweis. Brix sagt ausdrücklich im Eingange seiner Arbeit, dafs man bis jetzt keine bestimmten Regeln gehabt habe, um für den fraglichen Fall die Beziehung zwischen der spannenden Kraft und dem Widerstande etc. auf eine allgemeine Weise darzustellen, während der ganze von ihm behandelte Gegenstand bereits in der 1826 erschienenen ersten Auflage des Navier'schen Werkes, allgemein wie speciell, §. 387, §. 414, §. 417 (Première Partie) und ferner, vollständig erörtert ist.

Da auch Ardant, wie ganz richtig, zur Berechnung der Dimensions-Verhältnisse gerader Hölzer den auf Brix Arbeit bezüglichen Ausdruck Navier's, §. 17, im Anhange dieses Werkes aufführt, so werde derselbe hier noch benutzt, um die Haupt-Formel für die von Brix behandelten Fälle daraus abzuleiten.

Wir finden nämlich §. 17 des Anhangs den Ausdruck:

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\Omega} + V\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{oder auch}$$

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\Omega} + \frac{V}{\varrho}, \text{*)}$$

wobei R' den Coefficienten der absoluten Festigkeit bezeichnet, E den Elasticitäts-Modul, T die parallel der Schwerpunkts-Axe des prismatischen Körpers wirkende Spannkraft als Gewicht ausgedrückt, Ω den normalen Querschnitt des Körpers, V die von der neutralen Axe am entfernteste Faser und ϱ den kleinsten Krümmungs-Halbmesser der neutralen Faserschicht.

Für letzteren läfst sich aber bekannter Mafsen setzen (u. a. Seite 147 II. meiner Geostatik) $\varrho = \frac{EN}{Tx}$, wo N das Trägheits-Moment einer der gleichen Querschnittsflächen des Körpers, bezogen auf eine in der Ebene der Figur liegende und durch den Schwerpunkt gehende Axe, und Tx das Moment des Kräftepaares ist, welches sich ergiebt, wenn man T aus der Entfernung x von der Schwerpunktsaxe in letztere parallel zu sich selbst versetzt. Sonach erhält man:

$$R' = \frac{T}{\Omega} + V\frac{Tx}{N} \quad \text{und hieraus}$$

$$T = R'\Omega\frac{N}{N + V\Omega x},$$

*) Dass sich diese Formel ebenfalls auf ganz elementarem Wege ableiten läfst, bedarf wohl keines besondern Nachweises.

ganz dieselbe Formel, welche Brix unter Nr. (7) seines Aufsatzes als etwas Neues aufstellt.

In wie fern dieselbe nur Annäherungswerthe giebt, erfährt man bei Brix nicht, während dies aus Navier's mannigfachen Anwendungen, a. a. O. §. 407, §. 413 und ferner, sofort zu entnehmen ist.

Zu welchen Schlüssen überhaupt die Unbekanntschaft deutscher Schriftsteller, im Fache der angewandten Mathematik, mit den ausgezeichnetsten Werken des Auslandes führen kann, zeigt noch Ortmann im 9. Hefte, S. 283, Jahrgang 1846 der Försterschen Bauzeitung, woselbst er die Navier'schen, bereits 1826 gedruckten allgemeinen Gleichungen der von Brix behandelten Sätze als zuerst von ihm aufgestellt bezeichnet.

Doch genug hiervon, da das bisjetzt Aufgeführte zur Genüge darthun dürfte, wie höchst willkommen Ardant's Werk in Deutschland genannt zu werden verdient.

Bleibt auch noch hinsichtlich mancher von Ardant behandelten, so wie namentlich anderer nicht erörterten wichtigen Fälle der betreffenden Gegenstände noch Manches zu wünschen übrig*), immerhin ist seine Arbeit als eine solche zu betrachten, welche ein neues fruchtbares Feld von interessanten für die Praktiker zuweilen ganz unentbehrlichen Erörterungen darbietet, für dessen Bearbeitung sich namentlich die bereits in den Bereich der Anwendungen übergegangenen ehemaligen Zöglinge unserer deutschen technischen Bildungs-Anstalten höchst verdient machen könnten.

Rühlmann.

---

*) Dem strengen Kritiker des Ardant'schen Werkes, vom Standpunkte der mathematischen Analysis aus, erinnere ich an die trefflichen Worte unseres hochgeehrten Oberbaurathes Hagen in Berlin, mit welchen derselbe den wissenschaftlichen Zustand der Hydraulik in seiner Beschreibung neuer Wasser-Bauwerke, Königsb. 1826, schildert, woselbst er unter andern Seite 3 sagt:

„Im Allgemeinen verdankt man in den mathematischen Wissenschaften auch nicht „denjenigen Männern die schönsten Entdeckungen, die am eifrigsten waren, alle Gesetze „in mathematische Formeln einzukleiden, sondern vielmehr solchen, welche die Gegen-„stände unter einem Gesichtspunkte aufzufassen wufsten, wodurch die analytischen „Operationen möglichst abgekürzt und vielleicht gar entbehrlich wurden. Es ist auch „gewifs, dafs die Vereinfachung der Rechnung und die Hervorbringung einer leichten „Uebersicht immer der schwierigste Theil jeder analytischen Untersuchung ist, und „darin vorzüglich die Kunst des Mathematikers besteht, während ein Wust von Formeln, „wie sie in manchen Schriften vorkommen, die weder an sich klar sind, noch auch zu „brauchbaren Resultaten führen, nichts weniger als einen grofsen Analytiker beurkunden."

Vorbemerkung des Uebersetzers.

Es dürfte nicht überflüssig sein, einige Worte über die Grundsätze zu sagen, die mich bei dieser Uebersetzung geleitet haben. Eleganz und Kürze der Schreibweise sind gewifs so lange fest zu halten, als Klarheit und Deutlichkeit der Darstellung nicht dadurch beeinträchtigt oder wohl gar vernachlässigt werden. Da nun diese Abhandlung nicht nur dem theoretisch gebildeten Techniker, sondern auch dem blofsen Praktiker bei Entwürfen dienlich sein sollte, so habe ich mich bemüht, vorzugsweise diese beiden letzten Eigenschaften, so viel als möglich war, der Uebersetzung zu verleihen, und ich wünsche sehr, einigermafsen dieser Absicht Genüge geleistet zu haben.

Stets habe ich danach gestrebt, die Meinungen und Ansichten des Autors möglichst treu wiederzugeben, ohne jedoch ängstlich an den Worten des Originals festzuhalten; bei den technischen Ausdrücken, die im Deutschen noch so wenig übereinstimmend sind, suchte ich die bezeichnendsten und gebräuchlichsten zu wählen, und wo es nöthig schien, ist der Französische Ausdruck nebenbei bemerkt worden.

Schliefslich bleibt mir noch der Wunsch zu äufsern übrig, dafs die Deutsche Uebersetzung eine eben so gute Aufnahme bei dem vaterländischen technischen Publico finden möge, wie sie das Original bereits in Frankreich gefunden hat, und dafs sie wenigstens einen kleinen Beitrag zur Aufklärung eines Gegenstandes liefern werde, über den bislang die Meinungen so getheilt waren.

Bremerhaven, im Mai 1847. **v. K.**

Inhalts-Verzeichnifs.

Viertes Capitel.

Fünftes Capitel.

Sechstes Capitel.

Siebentes Capitel.

Achtes Capitel.

Neuntes Capitel.

Anhang.

Vorbericht des Verfassers.

Gegenwärtige Abhandlung, über grofse Sprengwerke beantwortet hauptsächlich folgende Fragen:

1) Ueben Dachstühle etc. von grofser Spannweite, deren Untertheile nicht durch Zugbänder von Holz oder Eisen zusammengehalten werden, einen Horizontal-Schub gegen ihre Widerlager aus?

2) Wie grofs ist dieser Schub, und wie stark müssen die Mauern und Pfeiler sein, welche diese Dachstühle etc. tragen, um demselben widerstehn zu können?

3) Ist die Anwendung grofser Holzbögen in Bezug auf Widerstandsfähigkeit und Kosten vortheilhaft. Mufs man denselben nicht die blofs aus geraden Hölzern zusammengesetzten Dachstühle etc. vorziehn?

4) Welche Querschnitte hat man den wesentlichsten Theilen grofser Sprengwerke zu geben, je nach der Weite des zu überdeckenden Raums und nach dem Gewichte der Bedachung?

Dieser für sich bestehenden Abhandlung ist noch ein Anhang beigefügt, über den noch etwas Näheres gesagt werden mag. Derselbe enthält nämlich eine summarische Auseinandersetzung der Theorie der Biegung gerader und gebogener prismatischer Körper, eine Theorie, welche man den Arbeiten eines Galiläi, Mariotte, Jacob Bernouilli, Coulomb und Duleau verdankt, und die in Form von Lehrsätzen mit den meisten Anwendungen, deren sie fähig ist, von Navier in seinem ausgezeichneten Werke über Anwendung der Mechanik auf die Stabilität von Bau-Constructionen aufgenommen, endlich noch in einigen Theilen von Persy, vervollkommnet ist.

Das Studium der Werke der beiden letztgenannten Gelehrten, liefs den Autor dieses Werkes den Nutzen und die Möglichkeit einsehen, die Frage über die Anordnung grofser Sprengwerke durch Versuche zu begründen. Er

hatte zu diesem Zwecke nöthig, einige neue Anwendungen der Theorie der Biegung gerader oder gekrümmter prismatischer Körper zu machen, oder schon angedeutete Sätze vollständig zu entwickeln, um sie für die praktische Anwendung zu gestalten. In der ersten Anordnung seiner Arbeit hielt er es für genügend, bei den vorkommenden Formeln sich auf die Werke von Navier und Persy zu beziehen, und er hatte nur in Anmerkungen die von ihm selbst gemachten Entwickelungen angegeben, damit man nachrechnen könne.

Als indessen die Abhandlung auf Befehl des Kriegsministers gedruckt werden sollte, glaubten Mehrere, daſs die Ingenieure, welche Gebrauch von den vorkommenden Formeln machen wollten, auch gern deren Herleitung kennen möchten, weil sie beim augenblicklichen Bedürfnisse nicht immer obige Werke von Navier und Persy zur Hand hätten. Es schien ihm daher nützlich, in einer geordneten Zusammenstellung die zum Verständniſs des Werkes unentbehrlichsten theoretischen Entwickelungen zu geben und numerische Beispiele hinzuzufügen, welche den in der Anwendung derselben zu befolgenden Weg vorzeichneten, und eben diese Gründe waren die Veranlassung der Entstehung des Anhangs.

Der Verfasser benutzt übrigens gern diese Gelegenheit, um den Herren Bergère, Ingenieur-Obersten, de Mondésir, Bataillons-Chef beim Ingenieurcorps, Arthur Morin, Artillerie-Capitain, Schuster, Ingenieur, und Bodin, Mechaniker, für ihre Unterstützung und den Rath, den dieselben ihm so bereitwillig gaben, zu danken. Zugleich fühlt er sich gedrungen, seinen Dank den Herren Abgeordneten der Academie für die ermuthigenden Ausdrücke, die ihr Bericht enthält, auszusprechen. Es giebt wohl Nichts, was ernsthafte Studien anziehender macht, und ihre unfruchtbaren und mühevollen Anfänge vergessen lässt, als das Glück, wohlwollenden Freunden und nachsichtigen Beurtheilern zu begegnen. —

Ardant.

Theoretische und praktische
Studien
über die Anordnung der
Sprengwerke von grosser Spannweite.

Erstes Capitel.

§. 1. Allgemeine Bemerkungen über Gespärre von grosser Spannweite.

Die Anordnung derjenigen Dachstühle, welche die Bedeckung von Gebäuden, die eine grofse Weite haben, tragen sollen, ist wohl eine der wichtigsten und schwierigsten Aufgaben der Baukunst. In der That, sind in einer Hinsicht diese Constructionen wegen der Dimensionen und der Güte der dazu nöthigen Materialien immer ziemlich kostbar, und in der anderen findet der mit dem Entwurfe beauftragte Ingenieur nur selten Vorbilder, denen er mit Vertrauen nachahmen kann. Für dergleichen Werke, die die gewöhnlichen Ausdehnungen überschreiten, werden Erfahrungen spärlich, und die Theorie derselben ist noch in so gelehrte Formeln eingehüllt, dafs sie nur nach langen und mühsamen Studien hülfreiche Hand leisten wird. Hiernach schien es mir, dafs es eine erspriefsliche Arbeit sein dürfte

1) »Zu untersuchen, welches System der grofsen Gespärre vereinigt Billigkeit »in der Herstellung, Eleganz der Formen und Solidität, auf eine genügende »Weise.

2) »Regeln zu geben, welche die Entwürfe erleichtern können, und Formeln »zur Berechnung der Dimensionen der Hölzer und Eisentheile zu bilden, »aus denen die Dachstühle bestehen.«

Dachstühle von grofser Spannweite sind keine Erfindung der Neuzeit. In den letzten Zeiten des römischen Reichs bauten die Römer eine ziemliche Anzahl von Gebäuden zu religiösen Zwecken, deren Weite nahe an 26ᵐ betrug, und sie

brachten zu deren Bedeckung ein Constructions-System in Anwendung, dessen Typus in der Basilika des St. Paul auf uns gekommen ist. Diese Dach-Construction, die im 4ten Jahrhundert erbaut, im Jahre 1823 durch eine Feuersbrunst zerstört wurde, war durch ihre Einfachheit und gleichzeitige Solidität merkwürdig.

Nach und nach sind daran einige Abänderungen gemacht, die noch zu ihrer gröfseren Stärke beitragen, ohne der ersten Idee ihrer Erfindung zu schaden. Heutigen Tages besteht sie aus zwei Sparren, durch einen Durchzug zusammengehalten, der sie hindert, die Mauern, auf welche sie sich stützen, umzukanten. Auf zwei Drittel ihrer Länge sind die Sparren durch Streben, die sich gegen einen Spannriegel lehnen, verstärkt, welcher letztere durch die obere Hängsäule gehalten, selbst den Durchzug mittelst Zangen, die zugleich die Stöfse des Spannriegels mit den Streben sichern sollen, trägt. (Taf. I. Fig. 1.)

Dieser Dachstuhl kann bei Gebäuden von beliebiger Weite angewendet werden. Palladio, einer der berühmtesten Baumeister der Renaissancezeit, wandte ihn so häufig an, dafs er nach ihm benannt wurde, und der Gebrauch dieses Dachstuhls der anfänglich Italien eigen war, verbreitete sich bis zum Norden Frankreichs. Zu Metz insbesondere findet man ihn in Bauwerken aus verschiedenen Jahrhunderten, und heute noch ist er von allgemeiner Anwendung. Ganz neuerdings hat ihn das Artillerie-Corps zur Bedeckung der Arsenal-Schmieden bestimmt, die ungefähr bis zu 20^{m} lichte Weite haben mögen. De Bétancourt endlich, als er das Project der riesenmäfsigen Holz-Construction, die ein Exercirhaus zu Moskau, von 48^{m} Weite überdeckt, verfertigte, bediente sich des antiken Dachstuhls, mit der einzigen Umänderung, dafs er drei Spannriegel statt des einen oberhalb des Durchzuges anbrachte, und eben so viele Systeme von Streben, die der Anordnung der Spannriegel entsprachen. —

Die von den Alten erfundene Construction erfüllt also die Bedingung der Solidität, und so lange, als die Entfernung der Mauern 20 bis 24 Meter nicht übertrifft, auch die einer nicht zu grofsen Kostspieligkeit; über diese Weite hinaus, verlangen aber die grofsen Durchzüge, um ihr eignes Gewicht zu tragen, seltene und daher theure Hölzer und schwer auszuführende Verbindungen. Was die dritte Forderung der Eleganz angeht, so mufs man gestehen, dafs diese nicht erfüllt ist. Wie gering auch immer die Spannweite des Dachstuhls ist, so ist der Anblick der Durchzüge und der Zangen nicht angenehm, und die in der Luft hängenden Holzmassen scheinen bedenklich und gewähren nicht den Eindruck von Festigkeit. Endlich nehmen die dazu gehörigen Theile einen Raum ein, den man oft, gewisser Zwecke des Gebäudes halber, nutzbar machen und daher frei sehen möchte. —

Dies sind also die Mängel, durch welche einige Constructeure sich veranlafst sahen, die Anwendung dieses Dachstuhls aufzugeben, und welche die erste Veranlassung zur Erfindung der Holzbögen, von denen wir sogleich reden werden, gaben. Indessen, obgleich dies wirkliche Mängel sind, so giebt es dennoch Mittel sie zu vermeiden; verschiedene in England gemachte Versuche zeigen, dafs eine zweckmäfsig angeordnete Verbindung von Holz und Eisen zugleich unzwei-

felhaft dahin führen mufs, dem obigen Systeme die noch mangelnden Vorzüge zu verleiben, und es gleichzeitig leicht, solide und elegant zu machen.

Es ist bekannt, dafs in einem Dachstuble die Widerstände, welche die verschiedenen Theile desselben zu leisten haben, nicht alle von derselben Art sind. Die Streben und Spannriegel müssen dem Zusammendrücken widerstehn, die Sparren der Zusammendrückung und Biegung gleichzeitig, die Durchzüge und Hängesäulen allein Widerstand gegen Zug leisten. Man kann also diese letzten Theile durch Eisen ersetzen. Die Durchzüge sind aber gerade diejenigen Stücke, welche wegen ihres grofsen Eigengewichts den gröfsten Querschnitt verlangen und den erwähnten schlechten Eindruck machen, und da zugleich das Eisen einen Widerstand gegen Zerreifsen leistet, der den des Holzes ungefähr zwanzig Mal übertrifft, so leuchtet ein, dafs eine nur dünne Eisenstange hier die Stelle eines starken Holzes einnehmen kann, und dafs auf diese Weise der antike Dachstuhl den Ausdruck des Schweren und Massigen verliert, der ihm gewöhnlich alle Zierde raubt. Wenn aber der hölzerne Durchzug und die Zangen entfernt sind, bleiben nur noch die Sparren und der Spannriegel, deren Ganzes eine polygonale Figur bildet, die abgerundet und so gefällig wie man will gemacht werden kann. (Siehe Taf. XXV.)

Die Anwendung des Eisens bietet einen anderen nicht weniger wichtigen Vortheil dar, nämlich die Sicherung der Verbindungen der grofsen Gespärre, die dem Brechen am meisten ausgesetzt sind, und eine Verminderung der geringeren Festigkeit an den Stellen wo Hirnholz gegen Langholzfasern trifft. Diese Zwecke erreicht man dadurch, dafs die Zapfen und Zapfenlöcher durch Eisenarmirungen, in welche die Hölzer eingepafst sind, ersetzt werden, wie man es in der Zeichnung eines in England construirten Dachstuhls sieht, die mir von Debret, Gouvernements-Architekten, mitgetheilt ist und die ich hier wiedergebe. (Taf. I. Fig. 2.)

De Bétancourt hat gleichfalls, bei der Construction des Dachstuhls über dem Exercirhause zu Moskau, von Eisenarmirungen Gebrauch gemacht.

Man begreift übrigens leicht, dafs sich nicht allein beim antiken Dachstuhle oder dem sogenannten Dachstuhl des Palladio Eisen anwenden läfst, solches vielmehr bei allen nur möglichen Arten von Dachstühlen gebraucht werden kann, und ich glaube, dafs durch seine Anwendung das Problem der Gespärre von grofser Spannweite am vollkommensten gelöst werden kann.

In jetziger Zeit indessen ist dieses Mittel, die Uebelstände der Hölzer von grofsen Dimensionen, die als Durchzüge dienen, zu vermeiden, noch neu und noch im Werden begriffen; seit langer Zeit benutzt man eine andere Constructionsart, die zwar nicht gänzlich zu verlassen, aber in ihrer Anwendung einzuschränken sein dürfte, und die darin besteht, einen Bogen oder Halbkreisbogen an die Stelle derjenigen Stücke zu setzen, die in den aus geraden Hölzern gebildeten Gespärren der Biegung und dem Sparrenschube zu widerstehen haben.

Die erste Einführung der Bogengespärre, die man wohl Holzgewölbe nennen könnte, datirt sich ungefähr aus der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts, und man verdankt sie Philibert de l'Orme. In diesem Zeitalter wurden die sehr hohen

Dächer durch Zimmerwerke getragen, deren Gespärre ohne Durchzüge einander so nahe standen, wie die Leergespärre der heut zu Tage gebräuchlichen Dachgerüste. In gewissen Entfernungen ordnete man Bindergespärre (Lehrgespärre) an, die durch Zangen verbunden gegen die Wirkung des Windes gesichert wurden; die zwischen ihnen liegenden Leergespärre unterschieden sich von ihnen nur durch etwas geringere Dimensionen und dafs die Giebelsäule fehlte. (Fig. 3. Taf. I.) Diese Dachstühle, denen man für das Gewicht, was sie zu tragen hatten, eine übermäfsige Stärke gab, waren schwerfällig, belasteten die Mauern der Gebäude und erforderten wegen des spitzen Forstwinkels, Hölzer von grofser Länge.

Philibert de l'Orme versuchte sie durch Bohlenbögen aus Tannenholz zu ersetzen, die in derselben Entfernung wie die Leergespärre stehend, durch eine grofse Zahl von Queerriegeln gegenseitig befestigt wurden. (Taf. I. Fig. 4.) Er bemerkt schon, dafs man dieselben sehr gut aus dem Holze von Schiffswracken herstellen kann, was damals wenig geschätzt, wie es scheint, heute von den Zimmermeistern in Paris so sehr gesucht ist. Es ist kein Zweifel, dafs sein System, verglichen mit der Constructionsart der damaligen Zeit, schon als er es bekannt machte, bedeutend weniger kostspielig war, wegen seines geringen Gewichts, das Mauern von geringerer Dicke brauchte als die vorher nöthig gewesenen, und wegen der Ersparnifs, die es, verglichen mit den grofsen Holzmassen der altdeutschen Dächer, darbot. Als wesentliche Bemerkung mufs ich noch hinzufügen, dafs Philibert de l'Orme nicht von dem Weglassen der Durchzüge, die den Sparrenschub am Untertheil der Gespärre verhindern, redet, und zwar aus guten Gründen, denn die hohen altdeutschen Dächer besafsen keine dergleichen; ihr Schub wurde durch die Stärke der Mauern und die Menge Eisenwerk, welches man in diesen Constructionen verschwendete, aufgehoben. Das Originalwerk dieses Schriftstellers ist in obiger Beziehung merkwürdig, besonders Buch X. Cap. III. und die folgenden, Seite 281 der Ausgabe von 1626.

Seit Philibert de l'Orme verbesserten sich die Dach-Constructionen in Frankreich hinsichtlich Leichtigkeit und Verständnifs der Zusammenstellung sehr. Die Giebel hatten nicht mehr die frühere unverhältnifsmäfsige Höhe, zugleich stieg der Arbeitslohn in einem viel gröfseren Verhältnisse als der Preis der Materialien, wefshalb denn auch die Bohlenbögen den Vortheil der Billigkeit gänzlich verloren. Heutigen Tages würden sie die theuerste Construction abgeben, wenn die Gespärre so nahe gestellt würden, wie der Erfinder es angiebt. Trotz dem hat sie aber den beachtungswerthen Vorzug, sich vollkommen der architektonischen Ausschmückung grofser Gebäude anzuschliefsen, und sich allen Formen, selbst den verwickeltsten, welche Gewölbe und die verschiedenen Durchdringungen derselben darbieten, anzupassen.

Gegen das Ende des verflossenen Jahrhunderts wandte sich die Aufmerksamkeit der Constructeure besonders auf die Verbesserungen, deren die Bogengespärre fähig waren. Einige glaubten, dafs die krumme Linie der Bohlendächer die hauptsächlichsten Ausgaben verursachte, wegen des bedeutenden Abfalls den man bei der Zurichtung des Holzes erhielt, und wandten daher die Bohlen in

ihrer ganzen Länge an, wodurch statt der Bogenform ein Polygon zu Stande kam. Beispiele dieser Constructionsart sind sehr häufig, und ich will blofs eins neuerer Zeit anführen, was mir bemerkenswerth schien, da es die Eleganz der Kreisbogenform mit der Unverschiebbarkeit des Dreiecks vereint. Es ist dies der Dachstuhl eines Wagenschuppens von 18m Weite in der Strafse Bouloy (Metz) vom Zimmermeister, Lasnier fils, construirt und Taf. I. Fig. 6 dargestellt.

Ich komme jetzt zu einer anderen Bogen-Construction, welche der vorzüglichste Gegenstand meiner Versuche ist, und die wegen des Beifalls, den sie gefunden hat, und der Vortheile, die man ihr zuschreibt, eine gründliche Untersuchung verlangt.

Sie wurde von Constructeuren erfunden, die eine geringere Kostspieligkeit durch Verminderung der Arbeit erreichen wollten, und zwar dadurch, dafs sie die Gespärre noch mehr von einander entfernten und zugleich die Verminderung ihrer Zahl durch Vergröfserung ihrer Queerschnitte auszugleichen suchten. Statt der aus dreifachen Bohlen von Tannenholz bestehenden Gespärre, schlug Lacaze, Zimmermeister in Paris, Bogen aus Eichenholz vor, aus Stücken die dieselbe Dicke wie jene drei Bohlen hatten, und die mittelst eines Hakenkamms mit einander verbunden wurden. Er nahm die Entfernung der Gespärre nahe so wie sie Philibert de l'Orme festgesetzt hatte, aber nach ihm vermehrte man ihren Abstand bedeutend, so dafs er z. B. im Reithause von Chambière zu Metz, 1819 erbaut, 3m,30. beträgt. Zu Rochefort sind die Gespärre des Daches eines überdeckten Landungsplatzes in 3m,80 Entfernung gestellt, welche auch zugleich die der gemauerten Pfeiler, von denen sie getragen werden, ist.

Im Jahre 1825 schlug der Oberst Emy für grofse Gespärre ein neues System von Bögen vor. Es bestand aus langen und dünnen Holzschienen, welche über einer Lehre gekrümmt, die angenommene Gestalt mittelst Hülfe von durchgezogenen Schraubbolzen und darum gelegten eisernen Bändern, durch welche sie zusammen gehalten wurden, beibehielten. Diese sinnreiche Erfindung wurde bald bei allen Gebäuden von grofser Spannweite, die in damaliger Zeit entstanden, angenommen und ausgeführt, und man brachte die Gespärre in den anfänglichen Constructionen 3m,30, dann 4m und endlich in einer der neuesten 6m,50 von einander entfernt, an.

Emy hat unzweifelhaft gewifs nicht die Absicht gehabt, der Construction des Philibert de l'Orme nachahmen zu wollen; daher ist auch nicht ihm, aber wohl denen, die über die von Lacaze gezogenen Grenzen die Entfernung der Bogengespärre ausdehnten, der Vorwurf zu machen, die anfängliche Idee ihres Erfinders gänzlich entstellt zu haben.

Dieser Vorwurf ist gegründet. In der That konnten die in grofsen Abständen aufgestellten Gespärre nicht so verbunden werden, dafs sie sich gegenseitig stützten, und man mufste sie, um ihnen eine genügende Stabilität zu geben, in ein System einrahmen, welches ich gerades Gespärre nennen will, und welches aus zwei geneigten Sparren und zwei verticalen Ständern, die durch Tragbänder und durch einen Spannriegel zusammengehalten werden, besteht. Ueberdies werden Pfetten und starke Sparren nöthig, wenn die Gespärre in Abständen von

$1^m,50$ bis 2^m sich befinden, was, wenn sie sehr nahe sind, nicht der Fall ist, so dafs dadurch der Vortheil, keine starken und langen Hölzer anwenden zu brauchen, gänzlich verloren geht.

Ich füge noch hinzu, dafs von den Kosten der Construction hier nicht so viel der Solidität zu Gute kommt, als in dem anfänglichen Systeme. In der That dienen die Pfetten, Leersparren, Giebelbänder und Zangen nicht unmittelbar dazu, das Gewicht der Bedeckung zu tragen; das Bundgespärre selbst nur dient wirklich als Stütze; nun ist aber in dem Systeme des Philibert de l'Orme alles Holz zu Bundgespärren verwandt, das heifst zum Stützen, während in den anderen Systemen nur ein Theil des Holzes diese Bestimmung erfüllt.

Dies ist jedoch noch nicht Alles. Es ist klar, dafs das Gewicht der Dächer, wenn es die Mauern nur an einigen Punkten belastet, diese viel mehr in Anspruch nimmt, als wenn es über ihre ganze Länge gleichförmig verbreitet ist, und dafs dadurch nothwendig eine Vermehrung der Mauerdicke herbeigeführt wird. Die Erfahrung hat dies auch gezeigt, denn einige Bogengespärre neuerer Art, die vor kurzem ausgeführt wurden, übten gegen die Mauern einen solchen Schub aus, dafs man zu der ungewöhnlichen Anwendung von eisernen Zugstangen und Strebepfeilern greifen mufste. Diese ganz natürlichen Folgen kamen sehr unerwartet, weil man sie bei den Gespärren von Philibert de l'Orme nie bemerkt hatte, und weil alle Schriftsteller von Abhandlungen über Holz-Constructionen, von Mathurin Jousse bis Rondelet, fast ein gänzliches Stilischweigen über diesen Schub und die Hülfsmittel, sich dagegen zu schützen, beobachten.

Ich weifs, dafs ich hier mit den Ansichten vieler Constructeure im Widerspruch stehe, indem sie den Bogengespärren die Vorzüge der geringen Kostspieligkeit und der Festigkeit zuschreiben, dafs sie ferner keinen Schub gegen die Mauern ausüben und eine so gefällige Ansicht, wie kein anderes System sie gewähren kann, darbieten. Bestehen aber diese Vorzüge wirklich? Die Beantwortung dieser Frage durch Versuche schien mir sehr nützlich zu sein, und eben dies ist der Zweck der Arbeit, die ich unternommen habe.

§. 2. Summarische Auseinandersetzung des Zweckes und der Resultate der über Holzbögen und Gespärre mit Bögen gemachten Versuche.

Ich gestehe, dafs beim Anfange meiner Versuche meine Absichten nicht so bestimmter und systematischer Art waren, als man nach dem, was folgt, glauben möchte. Ich war mit der Constructionslehre an der Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Metz beauftragt, und hatte mir vorgenommen, in nur geringer Ausdehnung die vorzüglichsten Formeln, die beim Entwurfe von Holz-Constructionen behülflich sein können, zusammenzustellen. In diesen Formeln kommen gewisse constante Werthe vor, welche die specifische Elasticität (élasticité spécifique) der vorkommenden Holztheile bezeichnen, und welche für aus mehren Stücken zusammengesetzte Bögen durch Versuche bestimmt werden mufsten. Ich war indessen nie der Ansicht, dafs die Halbkreisbögen keinen Schub gegen die Mauern ausübten; das Studium des ausgezeichneten Werkes von Navier, über Stabilität

der Bau-Constructionen hatte mich in der entgegengesetzten Meinung, auf die man schon durch bloſses Nachdenken über diese Frage kommen würde, bestärkt, und ich wollte durch Thatsachen die Werthe bewahrheiten, welche man mittelst der Theorie für diesen Schub findet.

Schon nach meinen ersten Versuchen erstaunte ich über die groſse Biegsamkeit der Holzbögen, und über die Leichtigkeit, mit der sie unter der geringsten Belastung ihre Form veränderten, so daſs über die Güte der Verbindung eines Bogens mit einem geraden Gespärre, woraus die Bogengespärre bestehen, allerlei Zweifel in mir entstanden und mich veranlaſsten, mehre Systeme von Gespärren zu untersuchen und unter sich zu vergleichen. Meine, durch verschiedene von mir nicht abhängige Umstände unterbrochenen Versuche sind nicht so vollständig gewesen, als ich es gewünscht hätte, allein ihre Resultate haben mich dennoch in den Stand gesetzt, eine Reihe die Bogengespärre betreffenden Fragen in folgender Weise beantworten zu können:

Erste Frage. **Sind Bogengespärre billiger als gerade Gespärre?**

Antwort. **Nein.**

Diese Frage läſst sich durch Zahlen beantworten; die folgende Tabelle giebt genügende Auskunft.

Bezeichnung der Gespärre.	Preis des Cubik-Meter Zimmerwerk für das blosse Gespärre.	Preis des Quadrat-Meter inneren bedeckten Raums, in der Horizontal-Projection gemessen.	Angabe der Constructionen, von denen die Berechnungen genommen.	Bemerkungen.
Gespärre nach Philibert de l'Orme.	,,	f. 19,00 (a)	Reithaus der Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Metz, 1810 erbaut.	Die zweite Columne giebt die Kosten des zur Bedeckung von einem Quadrat-Meter Raum nöthigen Zimmerwerks, darunter das vollständige Dachgerüst, mit Ausnahme der Belattung und der Schiefer- oder Ziegel-Bedachung verstanden. Die Gespärre sind in $3^m,30$ Entfernung angenommen, ausgenommen die von Philibert de l'Orme, die in $0^m,70$ Entfernung stehen.
Id. von Lacaze verändert.	f. 80,0	19,00 (a)	Reithaus von Chambiere zu Metz, 1819 erbaut.	
Id. von Lasnier verändert.	,,	19,70 (b)	Wagenschuppen in der Strasse Bouloy 1834 construirt.	(a) Es lässt sich vermuthen, dass jetzt die Preise höher sind. Man kann sie auf 23 oder 24 Francs schätzen.
Bogengespärre aus gebogenen Hölzern.	120,0	19,00	Exercirhaus der Artillerie- und Ingenieur-Schule, 1838 erbaut.	(b) Diese Zahl ist nur annähernd, da die Details, worauf sich die Rechnung stützen sollte, nicht genügend in Kenntniss gezogen werden konnten.
Gewöhnliches gerades Gespärre.	70,0	12,00 (c)	Verschiedene Constructionen zu Metz.	(c) Dieser Preis ist im Maximum. Er kann sich bis zu 8 Francs erniedrigen.

Zweite Frage. **Besitzen die Bogengespärre die Eigenschaft, keinen Horizontal-Schub gegen ihre Widerlager auszuüben?**

Antw. Nein. — Alle Gespärre ohne Durchzüge bestreben sich, die Stützmauern nach aufsen zu kanten.

Die Untersuchung dieser Frage ist, was ihre Theorie angeht, Gegenstand des zweiten Capitels. Das Capitel IV. enthält die Auseinandersetzung der gemachten Versuche, um diese Theorie zu modificiren oder zu bestätigen.

Die Thatsachen und Schlüsse zeigen übereinstimmend, dafs dieser Schub der Bogengespärre wirklich besteht, und dafs bei der gewöhnlichen Vertheilung der Belastung, jeder Fufs des Gespärres gegen sein Widerlager mit einer Kraft schiebt, welche dem vierten Theil des Gewichts der Gesammtbelastung gleich ist. Vergleicht man diese Bögen mit anderen Systemen von Gespärren, so erkennt man, dafs der Schub keinesweges von der Natur der Materialien, aus denen der Bogen zusammengesetzt ist, abhängt, dafs er aber mit der Gröfse und Vertheilungsart der Belastung und mit dem Verhältnisse zwischen Spannweite und Pfeil sich ändert. Die kreisförmige oder polygonale Form der Gespärre übt eben so wenig Einflufs auf die Gröfse des Schubes aus; ein Bogengespärre schiebt eben so viel wie ein anderes von derselben Höhe und Spannweite, bei welchem die Gröfse der Belastung und die Art ihrer Vertheilung dieselben sind.

Dritte Frage. Ist der Widerstand, den die Bogengespärre gegen Biegung und Bruch zeigen, gröfser als der der geraden Gespärre?

Antw. Nein.

Im Gegentheil ist dieser Widerstand bei den am besten construirten Bögen zwei Mal geringer, als bei den aus geraden Hölzern zusammengesetzten Gespärren.

Man kann sich diese Thatsache erklären, wenn man bedenkt, dafs bei den aus auf die Hochkante gestellten Bohlen zusammengesetzten Bögen die transversalen Stöfse den Zusammenhang der Fasern unterbrechen, diese also durch ihre Ausdehnung keinen Widerstand leisten, und dafs eine Zusammendrückung nur an den Kanten der Stöfse selbst ausgeübt wird. In den Bögen aus gekrümmten Hölzern besteht kein Zusammenhang zwischen den auf einander folgenden Schienen; ungeachtet der Eisenbefestigungen verschiebt sich eine Schiene auf der anderen oder biegt sich unabhängig von den übrigen in einer Weise, dafs zwischen zwei Eisenbändern der Bogen sich auseinander giebt und sich zusammendrückt. Dies ereignet sich bei den stärksten Bögen. (Siehe Taf. VI.) Das Capitel IV. enthält die Theorie der Biegung von Bögen und das Capitel V. die darauf sich beziehenden Versuche.

Vierte Frage. Vermehren die Bögen, die man mit den geraden Gespärren, welche aus zwei Sparren und zwei Ständern gebildet sind, verbindet, bedeutend die Widerstandsfähigkeit dieser Gespärre?

Antw. Es kommt auf die Umstände an.

Ja: wenn der Bogen einen um ein Viertel stärkeren Querschnitt hat als der Sparren, und wenn er so construirt ist, dafs er grofse Steifigkeit besitzt.

Nein: wenn er biegsam ist, entweder wegen der Art seiner Zusammensetzung oder wegen seines geringen Querschnitts.

Man begreift leicht aus der Thatsache, dafs die Biegsamkeit der Bogen wenigstens das Doppelte von der der geraden Gespärre beträgt, dafs eine Zusammenstellung des Bogens mit den Sparren und Ständern, die ihn einfassen, durchaus jeder Gleichartigkeit entbehrt, was den Widerstand gegen das Gewicht des Daches angeht.

Wenn man nämlich diese Zusammenstellung belastet, wird der Bogen sich biegen und von dem belastenden Theile lösen, die geraden Stücke, die ihn einrahmen, werden das ganze Gewicht zu tragen haben, und zerbrechen, sobald sie eine Krümmung angenommen haben, die noch weit von derjenigen, welche der Bogen ohne Schaden erleiden kann, entfernt ist. Um also einen gleichförmigen Widerstand zu bewerkstelligen, müfste man die Steifigkeit oder den Querschnitt des Bogens bedeutend vermehren, wenn er nicht ein Theil des Gespärres werden soll, der gar keinen Nutzen schafft. Die Capitel VII. und VIII. beziehen sich auf diese Thatsachen.

Fünfte Frage. Giebt es Systeme von Gespärren ohne Durchzüge, die weniger kostspielig als die Bogengespärre, eine eben so genügende Wirksamkeit in Aussicht stellen?

Antw. Ja.

Beim Durchlesen des Capitels VIII. wird man finden, dafs die aus geraden Hölzern zusammengesetzten Gespärre einen vier Mal so grofsen Widerstand gegen Biegung geleistet haben als die Bogengespärre, wenn die Menge des gebrauchten Holzes dieselbe ist. Ueberdies glaube ich auch, ist es für einen geschickten Zimmermann keine schwierige Aufgabe, die geraden Gespärre so einzurichten, dafs ihre innere Form der Kreisbogenlinie nahe kommt und einen eben so gefälligen Anblick bietet, als die der Bogengespärre selbst. (Siehe Taf. XXIV.)

§. 3. Bemerkungen über die im §. 2 zusammengestellten Thatsachen.

Unter den Thatsachen, die ich so eben aufgeführt habe, sind zwei, die mir besonders die Aufmerksamkeit der Ingenieure, welche mit dem Entwurfe von Holz-Constructionen beauftragt werden, zu verdienen scheinen; die erste ist, dafs immer ein beträchtlicher Schub von Gespärren, wie sie auch gestaltet sein mögen, ausgeübt wird, welchem man Widerstand leisten mufs, entweder mittelst Durchzügen von Holz oder Eisen oder durch die Anbringung von Mauern und soliden Strebepfeilern, deren Wirkung dann derjenigen der Landpfeiler bei Brücken analog ist.

Die zweite ist das Uebergewicht der Widerstandsfähigkeit der Bögen oder der geraden Hölzer, deren Fasern ununterbrochen und vollständig zusammenhängend sind, gegen jene, die aus zusammengesetzten Stücken bestehend, transversale oder mit ihrer Länge parallele Fugen haben. Aus dieser zweiten Thatsache folgt, dafs, wenn ein Bogen nicht aus einem Stücke gebildet werden kann, alle Bemühungen des Constructeurs dahin gehen müssen, die einzelnen Theile desselben so zu vereinigen, dafs das Ganze so wenig wie möglich sich von einem homogenen und zusammenhängenden Körper unterscheidet.

Diese letzte Bemerkung ist von grofser Wichtigkeit und geht darauf hinaus, einen seit langer Zeit bestehenden Irrthum zu heben, der die Vergleichung des Widerstandes eines Bogengespärres von Holz oder Eisen mit dem eines Gewölbes treffend findet. Diese Vergleichung ist durchaus nicht genau. Die steinernen Gewölbe verdanken ihre Stabilität auf dem Anfänger dem Gewichte der Gewölbsteine, die Bogen hingegen behaupten ihre Form nur durch den ununterbrochenen Zusammenhalt ihrer Theile. Wenn das Verhältnifs der Dicke der Gewölbsteine zum Halbmesser der inneren Wölbung so gering wie die Dicke eines Bogens zu seinem Halbmesser wäre, würde das Gewölbe einstürzen, und selbst wenn man die Holzbögen verhältnifsmäfsig eben so stark wie die Gewölbe machte, würden sie ohne eine Verbindung zwischen ihren einzelnen Bestandtheilen nicht das geringste Gewicht tragen. In der zuerst angeführten Constructionsart benutzt man die Schwere, die Tragfähigkeit und die Unbiegsamkeit, die dem Steine eigen sind, in der zweiten sind die Elasticität und Cohäsion der Theile die wesentlichsten Eigenschaften.

Von diesem falschen Gesichtspunkte ausgehend, hat man in der Construction der ersten Brücken aus Eisen, Gewölb-Constructionen nachgeahmt, und eiserne Gewölbkeile hergestellt. Man hat auf diese Weise Systeme erhalten, deren Festigkeit fast nur auf dem Widerstande des Eisens gegen Zerdrücken beruhte, und bei welchen man, da der Widerstand des Eisens gegen Ausdehnung gar nicht bei ihnen in Frage kam, die hauptsächlichsten Eigenschaften desselben nicht in Anwendung brachte. Daher sind auch Bögen, wie z. B. die der Brücke des Jardin des plantes, sehr theuer gekommen und häufigen Reparaturen unterworfen. In jetziger Zeit sind die Ingenieure auf bessere Ideen zurückgekommen, und bemühen sich ihre Bögen so zu construiren, dafs diese so viel wie möglich einem einzigen Gufsstücke nahe kommen. Dem Constructions-System der Caroussel-Brücke von Polonceau liegt dies Princip zum Grunde, und ich schätze mich glücklich, auf einer solchen Autorität fufsen zu können.

Nach dieser Abschweifung, die mir indefs dem Gegenstande dieser Abhandlung nicht ganz fremd schien, komme ich auf die Dachgespärre zurück, und aus Allem, was vorhergegangen ist, bilde ich folgende Schlüsse, in Beziehung auf die unter diesen Gespärren zu treffende Wahl.

1) Wenn man eine Reitbahn, ein Exercirhaus oder irgend ein Local zu bauen hat, bei welchem nicht Lagerung und Transporte von Gütern es wünschenswerth erscheinen lassen, dafs der Raum zwischen den beiden Langseiten des Dachs gänzlich frei sei, ist das gewöhnliche Gespärre von Palladio mit Zugstangen und Hängestangen von Eisen am besten anzuwenden, wobei man gleichzeitig augenscheinliche Leichtigkeit, Solidität und Kostenersparnifs vereint. (Fig. 1, 2 etc. Taf. XXV.)

2) Will man, dafs der obere Theil des Daches gänzlich von Zimmerwerk frei sei, wie es zum Beispiel bei einem Speicher verlangt werden kann, oder wenn man für ein Mansardendach eine Construction in Gewölbform herzustellen wünscht, so mufs man der Anwendung des Bogens den Vorzug geben, und ein

Gespärre aus geraden Hölzern, wie das des Wagenschuppens von Lasnier (Taf. I. F. 6) oder das auf Taf. XXIV. benutzen. Ueber die unter diesen beiden Systemen zu treffende Wahl wird der Preis der Bohlen und der gröfseren Hölzer den Ausschlag geben.

3) Wenn aber Decoration oder irgend ein anderes Motiv bezweckt werden soll, wird man zu einem Bogengespärre seine Zuflucht nehmen, und dann wird dasjenige das beste sein, welches die gröfste Steifheit mit Rücksicht auf seine Dimensionen besitzt. Ein gerades Gespärre aus Holz mit einem Bogen aus Gufseisen würde ein sehr gutes Ganzes ausmachen, und ein Beispiel einer solchen Verbindung gebe ich Fig. 1. Taf. II. Was die Bogen aus gebogenen Hölzern anbetrifft, so mufs man ein steifes Holz, lange und dicke Schienen anwenden und die Eisentheile vermehren.

Die aus hochkantig gestellten Bohlen gebildeten Bögen, müssen aus zwei Lagen starker Bohlen mit gewechselten Stöfsen bestehen, welche durch Schraubbolzen zusammengehalten werden. Gut wird es sein, hier eiserne Bänder anzubringen, die ein Aufspalten der Bohlen der Länge nach verhindern.

Die eben abgegebenen Urtheile sind mir durch eine auf Thatsachen sich stützende Ueberzeugung eingeflöfst worden, die indefs das Verdienst der Erfinder, der verschiedenen auf grofse Zimmerwerke anwendbaren Bogensysteme keinesweges schmälern soll. Wenn diese Systeme auch nicht alle Eigenschaften besitzen, die man ihnen glaubte beimessen zu können, sind sie darum nicht weniger sehr scharfsinnige Zusammenstellungen, die in einer Menge von Fällen nützlich werden können, und deren Erfindung, ohne Widerrede, schwieriger war als die darüber auszuübende Kritik. Ein gänzliches Verlassen der Anwendung von Bögen erwarte ich übrigens auch nicht, und im Capitel X., wo ich die Formeln, die zur Berechnung der verschiedenen besprochenen Systeme von Gespärren dienen können, zusammenstellte, sind die für die Anordnung der Bogengespärre nicht vergessen worden.

Zweites Capitel.

Beschreibung der Gespärre, welche den Versuchen unterworfen wurden, und des Versuchs-Apparats.

Obgleich die Anzahl und die Dauer der Versuche, deren Resultate in den folgenden Capiteln enthalten sind, durch die Nothwendigkeit, Zeit und Material zu sparen, auf sehr enge Grenzen beschränkt wurden, würde doch die Aufzählung des Details eines jeden ermüdend und langweilig werden. Es schien daher

zweckmäfsig, alle auf die Untersuchung Bezug habenden Bemerkungen, in besonderen Tabellen zu vereinigen, um mit einem Blick die Thatsachen und Schlufsfolgen, die sich daraus nehmen lassen, zu übersehen. Bei der Annahme dieses Plans wird es aber nöthig, eine kurze Beschreibung der den Versuchen unterworfenen Gespärre und des Apparats der zu den Versuchen diente, voranzuschicken.

§. 1. Angabe und kurze Beschreibung der den Versuchen unterworfenen Bögen und Gespärre.

Taf. III. — Bogen Nr. 1. Von gebogenem Tannenholz aus fünf Schienen, jede $0^m,15$ breit und $0^m,027$ dick, durch 13 eiserne Bänder in Abständen von $1^m,39$ und durch 24 Schraubbolzen von $0^m,015$ Durchmesser, je zwei zwischen zwei Bändern, zusammengehalten.

Jede Lage Schienen war aus drei ungleichen Stücken zusammengesetzt. In der äufseren Bogenlinie war das längste Stück in die Mitte gelegt, so dafs sich an den Bruchstellen Stöfse fanden. Die anderen Schienen waren so angebracht, dafs ihre Stöfse immer durch volles Holz der darüber und darunter befindlichen Schiene bedeckt wurden.

Dieser Bogen war aufserordentlich biegsam, unerachtet der hinlänglich starken Dimensionen seines Querschnitts. Er war sorgfältig auf Rüstböcken zusammengesetzt, die danach angeordnet wurden, ihm eine Halbkreisform von $12^m,12$ äufserem Durchmesser zu geben. Nach seiner Aufstellung aber veränderte er durch sein Eigengewicht seine Form, der Scheitel erhöhte sich um $0^m,054$, die rechte Seite wurde um einige Centimeter flacher und die linke erhob sich um eben so viel.

Taf. VII. — Bogen Nr. 2. Von gebogenem Tannenholz. Die Dicke und der Durchmesser dieses Bogens waren dieselben wie bei dem Nr. 1, aber die Breite der Schienen betrug nur $0^m,075$. Er bestand aus 5 Schienen von $0^m,027$ Dicke, jede aus 3 Stücken zusammengesetzt. Bei der Construction dieses Bogens hatte man Stöfse an den Bruchstellen der äufseren Bogenfläche vermieden. Die Schienen wurden durch 13 Bänder und 24 kleine Schraubbolzen zusammengehalten.

Bogen Nr. 3. Derselbe wie der vorige, in welchem man nach verschiedenen Versuchen, die zerbrochenen oder verbogenen Schienen ersetzt hatte, und dann an jedem Ende ein $0^m,65$ langes Stück abgeschnitten, um einen gedrückten Bogen von $5^m,41$ Pfeil und $12^m,12$ Spannweite daraus zu machen.

Taf. VIII. — Bogen Nr. 4. Aus hochkantig gestellten Bohlen. Nachdem ich mit dem Bogen Nr. 1 verschiedene Versuche angestellt hatte, wünschte ich zu untersuchen, ob dieselbe Menge Bohlen, auf die Hochkante gestellt anstatt platt hingelegt zu sein, einen geringeren oder gröfseren Widerstand, den auf dieselbe Weise vertheilten Gewichten entgegenstellte. Ich liefs also die Schienen des Bogens Nr. 1 in Stücke von $1^m,30$ Länge schneiden, und einen Bogen von polygonaler, fast kreisförmiger Gestalt, daraus herstellen, der blofs aus vier Lagen

Bohlen bestand. Nach Beendigung der vierten Lage blieben nur noch 4 Stücke übrig, die man zur Verstärkung der Bruchstellen benutzte, indem man sie in *aa'* und *bb'* durch Schraubbolzen befestigte.

Die Zusammensetzung dieses Bogens war in soweit mangelhaft, dafs, obgleich die Stofsfugen durch volles Holz bedeckt waren, doch die der ersten Lage mit der dritten und der zweiten mit der vierten zusammenfielen. Er mufste also weniger Widerstand gegen Bruch leisten, als ein nach Philibert de l'Orme gut construirter Bohlenbogen.

Mit Ausnahme der vier kleinen Schrauben, welche die Verstärkungen *aa'* und *bb'* befestigen, sind weder Eisentheile noch Pflöcke an diesem Bogen; seine Lagen von Bohlen waren nur mittelst Pariser Stiften (pointes de Paris) genagelt. Die Stofsfugen waren aber sorgfältig gemacht, und die einzelnen Stücke berührten sich so gut wie möglich auf den Stofsflächen.

Taf. IX. — Bogen Nr. 5. Nach Philibert de l'Orme, wie es dieser Autor anzeigt, construirt von $0^m,70$ langen Stücken und aus drei Lagen gebildet, deren Stöfse so gewechselt waren, dafs sich an derselben Stelle der Dicke nur einer befand. Die Bohlenstücke waren sorgfältig geschnitten, aber ebenfalls nur mit Pariser Stiften auf einander genagelt.

Taf. X. — Bogen Nr. 6. Ist der Vorhergehende, in dem man einige zerbrochene Bohlen ersetzte und noch eine wichtige Abänderung traf, die darin bestand, dafs man eichene Pflöcke von $0^m,02$ Durchmesser, die durch alle drei Lagen gingen und sich mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Fugen befanden, anbrachte. Endlich schnitt man noch $0^m,65$ von jedem Ende ab, um einen gedrückten Bogen von $5^m,41$ Pfeil und $12^m,12$ Spannweite zu erhalten.

Taf. XII. — Bogen Nr. 7. Aus gebogenem Holze von $12^m,12$ Spannweite und $2^m,32$ Pfeil, auf dem Bogen mitten zwischen innerer und äufserer Begrenzung gemessen; aus fünf Schienen von gebogenem Holze von $0^m,15$ Breite und $0^m,054$ Dicke. Die äufsere und innere Lage bestanden aus einem Stücke, die übrigen aus zwei Stücken. Jeder Stofs, zu welcher Lage er auch gehören mochte, war durch zwei Schraubbolzen, einer zur Rechten, der andere zur Linken, gesichert. Die Anzahl dieser Bolzen war vierzehn, jeder $0^m,027$ stark. Ueberdies waren noch vier starke Bänder angebracht, um die Schienen zu verbinden und gegen einander zu pressen.

Taf. XIV. — Einfaches Gespärre ohne Durchzug N. 8. Dieses Gespärre, welches zur Vergleichung des Schubes der kreisförmigen Bögen mit den aus geraden Hölzern zusammengesetzten Systemen dienen sollte, wurde in Rücksicht auf die Kosten so construirt, dafs es mit den Bögen Nr. 2, 5 und 6 verbunden werden konnte, um dann Gespärre, wie die bei Dächern von grofser Spannweite gebräuchlichen, mit ihnen zu bilden.

Es bestand aus zwei Sparren und zwei Stuhlsäulen, deren Verbindung durch zwei Tragbänder und einen Spannriegel gesichert wurde. Um die Verbindungen des Spannriegels und der Tragbänder mit den Sparren und Stuhlsäulen, beinahe unveränderlich zu machen, hatte man sie mittelst Bolzen und Zangen verstärkt.

Der Querschnitt der Sparren war $0^m,12$ zu $0^m,075$, der Stuhlsäulen $0^m,14$ zu $0^m,075$. Die Tragbänder und Spannriegel hatten $0^m,10$ zu $0^m,075$.

Taf. XV. — Bogengespärre Nr. 9. Verbindung des Bogens Nr. 2 mit dem einfachen Gespärre Nr. 8 mittelst 9 verticaler Zangen, wodurch ein System von Gespärren entsteht, was von dem der Reithäuser zu Libourne, Saumur und Aire nur darin abweicht, dafs die Zangen vertical und die Ständer etwas gegen das Innere geneigt sind.

Taf. XVII. — Bogengespärre Nr. 10. Das Vorhergehende, nur dessen Stuhlsäulen um $0^m,65$ verkürzt.

Taf. XVIII. — Gespärre Nr. 11. Dieselben Dimensionen wie Nr. 10, aber die Zangen anstatt vertical, normal auf der Krümmung des Bogens.

Tafeln XIX. und XX. — Gespärre Nr. 12 und 13. Werden erhalten, wenn man in den Gespärren Nr. 9 und 10 die Bögen aus gebogenem Holze durch die Bohlenbögen nach Philibert de l'Orme, Nr. 5 und 6, ersetzt.

Taf. XXI. — Zusammengesetztes gerades Gespärre Nr. 14. Das einfache Gespärre Nr. 8, wie es die Figur zeigt, verstärkt.

Taf. XXII. — Zusammengesetztes gerades Gespärre Nr. 15. In dem vorhergehenden und in diesem Systeme hat man den Bogen durch gerade Stücke zu ersetzen gesucht, welche bei geringerer Masse und geringerem Preise einen gröfseren Widerstand leisteten. Das Gespärre Nr. 8 war nur für den Zweck der Versuche bestimmt, um das Resultat augenscheinlich zu machen, was bei der Ersetzung eines Bogens durch gerade Stücke erhalten wurde. Das Gespärre Nr. 15 kann mit einigen leichten Verbesserungen, um ihm mehr Gefälliges zu geben, ausgeführt werden. Ein Versuch, diese Verbesserungen anzubringen, ist in der Zeichnung des Gespärres auf Taf. XXIV. gemacht.

Dies wäre Alles, was augenblicklich über die den Versuchen unterworfenen Bögen und Gespärre zu sagen nöthig ist. Später wird sich Gelegenheit finden, ihre Zusammensetzung näher zu erörtern. Um ihre Beschreibung zu vervollständigen, bleibt nur noch übrig, eine Uebersicht der bei jedem zu seiner Construction gebrauchten Holz- und Eisentheile und eine Vergleichung des Preises des Cubikmeters von jedem Systeme zu geben.

Nicht überflüssig wird es sein zu bemerken, dafs das Holz, aus dem die Bögen und geraden Gespärre hergestellt wurden, durchweg Tanne aus den Vogesen war. Dies Holz ist weifs, sehr zart, fettig und schwammig mit sehr groben Fasern und von nicht sehr gleichartiger Textur. Je nach dem Grade der Austrocknung beträgt seine Dichte (Gewicht eines Cubikmeters) nur 440 bis 450 Kilog. Ein viereckiger prismatischer Stab aus diesem Holze, von $0^m,25$ Querschnitt, zerreifst, wenn er durch ein Gewicht von $312\,500^k$ nach der Längenrichtung gezogen wird. Derselbe Stab von 1^m Länge, dehnte sich um $0^m,00016$ aus, wenn eine Belastung von $10\,000^k$ an seinem äufsersten Ende angebracht wurde.

1. Tabelle. Gewichte und Preise der der Untersuchung unterworfenen Gespärre.

Angabe der Gespärre.	Detail der Holz- und Eisentheile.	Gewicht der einzelnen Theile.	Gesammtgewicht.	Preis der einzelnen Theile.	Gesammtpreis.
Bogen Nr. 1, aus gebogenem Holze.	Wirkliche Länge der Schienen 19,04 } 0,3846 Querschnitt . . . . . . 0,135 } 0,0202 } à 450 und . . . . 0,150 } d. Cub. m. 11 Bänder wiegen zusammen . . . . . . 24,50 24 Schraubbolzen wiegen zusammen . . 12,00 2 grofse Bänder - - . . 6,50	k 173,073 43,00	k 216,073	m. cub. 0,384 Holz à 120f. f. 46,08 43k Eisen à 1f,35. 58,05	f 104,13
Bogen Nr. 2, aus gebogenem Holze.	Wirkliche Länge der Schienen 19,04 } 0,1623 Querschnitt . . . . . . 0,075 } 0,0101 } à 450k zu . . . . 0,135 } d. Cub. m. 13 Bander und 24 kleine Schrauben	86,536 13,464	100,00	m. cub. 0,1623 Zimmerwerk à 120f. 19,48 13k.464 Eisen à 1f,35 18,18	37,66
Bogen Nr. 3, aus gebogenem Holze.			95,00		
Bogen Nr. 4, aus hochkantig gestellten Bohlen.	m. cub. Der Holzbogen wie Nr. 1 . . . . 0,380 3 Kilog. Pariser Stifte 3k,00	173,00 3,00	176,00	m. cub 0,38 Zimmerwerk à 100f. 38,20 3 Kil. Stifte à 1f,32. 3,96	42,16
Bogen Nr. 5, aus hochkantig gestellten Bohlen.	Wirkliche Länge der Schienen 19,04 } 0,203 Querschnitt . . . . . . 0,150 } 0,1065 } à 450k zu . . . . 0,071 } d. Cub. m. 3 Kilog. Pariser Stifte	91,25 3,00	94,25	m. cub. 0,203 Zimmerwerk à 100f. 20,30 3 Kil. Stifte à 1f,32. 3,95	24,26
Bogen Nr. 6, aus hochkantig gestellten Bohlen.	Der Bogen . . . . Die Eichenpflöcke . . . . 3 Kilog. Pariser Stifte	85,05 1,95 3,00	90,00		
Bogen Nr. 7, aus gebogenem Holze.	Wirkliche Länge der Schienen 14,50 } 0,609 Querschnitt . . . . 0,28 } 0,042 } à 459k zu . . . . 0,15 } d. Cub. m. 5 starke Schraubbolzen und 2 Bänder 21k,00 14 grofse Schraubbolzen 10,50	274,50 31,50	306,00	m. cub 0,609 Zimmerwerk à 120f 73,00 31k,50 Eisen à 1f,35 42,53	115,53

Fortsetzung der Tabelle.

Angabe der Gespärre.	Detail der Holz- und Eisentheile.	Gewicht der einzelnen Theile.	Gesammtgewicht	Preis der einzelnen Theile.	Gesammtpreis.
Einfaches gerades Gespärre Nr. 8.	2 Sparren und 1 Spannriegel. Zusammen lang . . . . . 17,20 } Querschn., 0,075 z. 0,12. } 0,155 2 Stuhlsäulen. Zusammen lang . . . . . 7,20 } Querschn., 0,075 z. 0,14. } 0,076 2 Tragbänder. Zusammen lang . . . . . 4,24 } Querschn., 0,10 z. 0,075. } 0,032 3 Zangen. Zusammen lang . . . . . 3,30 } Querschn., 0,108 z. 0,15 } 0,047 } m. cub. 0,310 Holz à 450k,00 den Cub. m. 14 Schraubbolzen	k 139,00 7,50	k 146,50	m. cub. 0,310 Zimmerwerk à 70f. f 21,70 7k,50 Eisen à 1f,35. 10,13	f 31,83
Gespärre Nr. 9, aus dem Holzbogen Nr. 2 und dem Gespärre Nr. 8, beide durch Zangen verbunden, bestehend.	Der Bogen . . . . Das Gespärre Nr. 8 . . . . Die Zangen, die noch zum Gespärre Nr. 8 kommen: Zusammen lang . . . . 10,60 } m. cub. 0,170 à 450k Querschn., 0,108 z. 0,15 } den Cub. m. 24 Schraubbolzen	100,00 146,50 76,50 18,00	341,00	Des Bogens. 37,66 Des Gespärres Nr. 8. 31,83 Zangenholzer m. cub. 0,170 à 70f. 11,90 18 Kil. Eisen à 1f,35. 24,30	105,69
Gespärre Nr. 10, aus dem Bogen Nr. 3 von gebogenem Holz und einem Nr. 8 ähnlichen Gespärre.	Der Bogen . . . . Das Gespärre . . . . Die Zangen	100,00 140,00 94,50	334,00		
Gespärre Nr. 11, aus gebogenem Holz, die Zangen normal auf die Krümmung.			334,00		
Gespärre Nr. 12, mit einem Bogen aus hochkantigen Bohlen.	Der Bogen . . . . Das gerade Gespärre . . . . Die Zangen nebst ihren Eisentheilen	94,25 146,50 94,50	335,55		

Fortsetzung der Tabelle.

Angabe der Gespärre.	Detail der Holz- und Eisentheile.		Gewicht der einzelnen Theile.	Gesammtgewicht.	Preis der einzelnen Theile.		Gesammtpreis.
Gespärre Nr. 13, mit einem Bogen aus hochkantigen Bohlen.	Der Bogen .... Das Gespärre .... Die Zangen		k 90,00 140,00 94,50	k 324,50	Die Bogen . . 24,26 Die Zangen . 11,90 Eisen . . . . 24,30 Das Gespärre Nr. 8 . . . 31,83	f	f 92.29
Zusammengesetztes gerades Gespärre Nr. 14, von demselben Gewichte wie das Gespärre Nr. 13, dessen Detail nebenstehend.	2 Sparren, 2 Stuhlsäulen, 4 Tragbänder, 1 Spannriegel und ein Unterspannriegel: Zusammen lang .... 36,72 Querschnitt, 0.12 zu 0,075. 2 Stuhlsäulen Länge .... 5,76 Querschnitt, 0,075 zu 0,14. Die Zangen Ganze Länge .... 3,76 Querschnitt, 0,108 zu 0,15.	0,330 0,060 0,060 m. cub 0,456			m. cub. 0,456 Zimmerwerk à 70f. 9k,80 Eisen à 1f,35	31,92 13,23	45,15
	à 450k den Cub. m. Die Schraubbolzen		205,20 9,80	215,00			

Bemerkung. Die Preise der Bohlenbögen nach Philibert de l'Orme, der gewöhnlichen Gespärre und des Eisenwerks, sind beinahe wie die Kosten loco Metz. Der Preis des Gespärres mit gebogenen Hölzern entspricht dem Kostenanschlage des Gespärres des Exercirhauses der Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Metz.

§. 2. Beschreibung des Apparats, welcher zum Messen des Schubes gedient hat.

Wenngleich ein Holzbogen, dessen Untertheile in eine Holzschwelle eingelassen sind, welche blofs auf dem Boden oder auf einer Mauer ruht, diese Schwelle in horizontaler Richtung nicht verschiebt, so würde man doch mit Unrecht daraus schliefsen, dafs Holzbögen keinen Horizontalschub ausübten. Diese Thatsache beweist höchstens, dafs die Reibung der Schwelle auf dem Boden oder auf dem Mauerwerk, dem Schube das Gleichgewicht halten kann. Dies wird übrigens auch immer Statt finden, denn die Enden der Bögen streben, sich mit einer Kraft, die gewöhnlich den vierten Theil des Gesammtgewichts des Dachstuhls und seiner Belastung nicht übertrifft, von einander zu entfernen, während der Widerstand, den die Reibung diesem Gleiten entgegensetzt, ungefähr bis zum dritten Theile desselben Gewichts sich steigern kann *).

*) Reibung des Eichenholzes auf Muschelkalk 0,61 des Druckes; des Eichenholzes auf Oolith-Kalkstein 0,63 des Druckes. Siehe die Versuche von Morin in dem Werke:

Um genaue Versuche über den Horizontalschub der Gespärre ohne Zugband zu machen, war also die erste Bedingung, Resultate zu erhalten, die von der Reibung unabhängig waren. Das Folgende zeigt, auf welche Weise ich dahin zu gelangen versuchte. (Siehe die Figuren der Taf. III.)

In dem neuen Exercirhause der Artillerie- und Ingenieur-Schule liefs ich auf fester, aus einem Rost bestehender Gründung zwei Grundmauern aus Quadersteinen, in 12m,03 Entfernung von Mitte zu Mitte, aufführen, welche Dimension mit dem gewöhnlichen Durchmesser der zu den Versuchen benutzten Holzbögen übereinstimmt.

Nachdem die oberen Flächen der Mauer genau in gleicher Horizontale abgeglichen waren, bestimmte ich auf denselben, mit Hülfe einer von der einen bis zur anderen ausgespannten Schnur, zwei parallele Linien, die 0m,21 von einander entfernt waren, um die Lage von 4 Stahlschienen, die in den Stein eingelassen werden sollten, vorzureifsen. Nach ihrer Befestigung waren diese Schienen auf jeder Grundmauer einander parallel und jede lag in der Verlängerung der zugehörigen auf der anderen Grundmauer.

Hierauf wurden zwei kleine gufseiserne Rollen von 0m,20 Durchmesser auf eine feste Axe von Eisen gesteckt und zwar so, dafs die Entfernung der Rollen von Mitte zu Mitte genau der Entfernung der Stahlschienen, auf welchen sie laufen sollten, entsprach.

Ueberdies verfertigte man Schuhe von Eichenholz, die um 0m,01 auf ihrer oberen Fläche ausgearbeitet, auf der unteren Seite mit kupfernen Lagern versehen waren, in welche die Axe der gufseisernen Rollen pafste.

Wenn nun der Bogen mit seinen Schuhen versehen und in verticaler Stellung gehalten, mit seinen beiden äufsersten Enden auf den Grundmauern ruhte, so hätte er mittelst des eben beschriebenen Apparats der Einwirkung der Kräfte, die seine beiden Enden von einander zu entfernen suchten, nachgeben können; aber ein an jedem derselben befestigtes und in horizontaler Richtung über eine lose Rolle gehendes Seil, trug einen mit Gewichten belasteten Kasten, die gerade dem Schube entgegengesetzt wirkend,* unmittelbar als Mafsstab desselben dienten, mit Vorbehalt der Correctionen, die noch anzubringen waren, um die passiven Widerstände des Apparats nicht unberücksichtigt zu lassen.

Im Allgemeinen war das Gewicht der Bögen und ihrer Belastung nicht bedeutend, was daher die Anwendung des folgenden Verfahrens, um eine weitere Correction entbehrlich zu machen, zuliefs. Denken wir uns nämlich den Bogen, dessen Horizontalschub man kennen wollte, der Wirkung einer Belastung unterworfen, so fing man damit an, in den an dem Seil aufgehängten Kasten, den ich Zugkasten (caisse de retenue) nennen will, ein Gewicht zu bringen, welches im

---

* Nouvelles Expériences sur le Frottement etc. faites à Metz en 1831 — 1833. Paris, 1832 — 1835; oder in dessen Aide-Mémoire de Mecanique. (Deutsch von Holzmann).

Stande war, den Fufs des Bogens um ein Weniges nach dem Mittelpunkte hin zu bewegen, und man bemerkte sich dieses Gewicht. Nun nahm man nach und nach so viel aus dem Kasten wieder heraus, bis, indem der Bogen wieder zurückwich, sein Fufs über seine anfängliche Stellung hinaus nach Aufsen rückte, und zwar um dasselbe Maafs als er vorher sich im entgegengesetzten Sinne von ihr entfernt hatte. Seine anfängliche Stellung war dabei durch Marken genau bestimmt gewesen. Indem man das Mittel aus den Gewichten des Zugkastens nahm, die diesen beiden Stellungen der Untertheile des Bogens entsprachen, erhielt man für den Schub einen Werth, der, wenn noch nicht ganz genau, wenigstens von dem Einflusse der passiven Widerstände unabhängig war. Nach Verlauf einiger Zeit hatten die bei den Versuchen angestellten Arbeiter eine solche Uebung in der Abschätzung der Kraft, die man ausüben mufste, um den Bogen nach innen oder aufsen sich bewegen zu lassen, dafs sie hinlänglich beurtheilen konnten, in welchem Augenblicke diese beiden verschiedenen Bestrebungen gleich waren, so dafs man das Gewicht des Zugkastens in diesem Augenblicke als Maafs für die Gröfse des Schubes annehmen durfte.

Um die Untersuchungen über die Biegung von Gespärren vornehmen zu können, waren nur einige einfache Erweiterungen des Apparats zum Messen des Schubes nöthig. An der Hinterseite der Quadermauern, die dem Untertheil der Bögen als Auflager dienten, liefs ich in einer Linie Rüststangen aufrichten, wie sie die Maurer zum Anfertigen ihrer Gerüste brauchen und die man in Metz tendières nennt. Auf diese Rüststangen wurde eine Bretttafel von unregelmäfsiger Figur genagelt, deren Oberfläche aber genau in einer verticalen Ebene lag, die mit der Horizontallinie durch die Mitte des Zwischenraums der Schienen, auf welchen sich die Enden der Holzbögen bewegten, parallel war. Diese Tafel diente, die Zeichnung der Curve aufzunehmen, welche entweder die innere oder äufsere Begrenzungslinie der Bögen in den Augenblicken bildete, für welche die Kenntnifs der Biegung am interessantesten war. Diese Zeichnungen wurden mittelst eines Winkelmafses hergestellt, dessen einer Schenkel sich gegen die Tafel, der andere gegen den Bogen legte, dessen Ecke also auf der verticalen Tafel die Projection der verschiedenen Punkte aufrifs, die man kennen wollte.

Nachdem man einen Bogen behufs des Versuchs aufgestellt hatte, zeichnete man zuerst die Krümmung auf, die er im natürlichen Zustande hatte, dann die, welche er durch die Einwirkung der Belastung annahm, und endlich die Krümmung, die er behielt, nachdem er von der Belastung wieder befreit war. Diese verschiedenen Curven wurden auf ein Polygon bezogen, was vorher auf die tannene Bretttafel gezeichnet war, mittelst Perpendikel, die man von jedem Punkte der neuen Curve, deren Zeichnung man haben wollte, auf die Seiten des Polygons fällte.

Eine zweite, der ersten entsprechende, Reihe Rüststangen, war vor dem Bogen aufgerichtet. Sie dienten, zugleich mit denen der parallelen Reihe, den Bogen in einer Vertical-Ebene durch ein Mittel zu halten, welches auf die Resultate der Versuche keinen Einflufs haben konnte. Es bestand darin, auf der

Aufsenfläche (extrados) des Bogens, Enden von Latten, die zu beiden Seiten überstanden, mit Nägeln zu befestigen, und zwar so, dafs sie von den Rüststangen einen Abstand von ein bis zwei Millimetern behielten. Diese Latten konnten zu keiner Reibung Anlafs geben, sobald aber der Bogen um einen Millimeter seitwärts kantete, fand er sich gestützt und in verticaler Stellung gehalten.

Die Rüststangen hatten zugleich den Zweck, den Unfällen, die der Sturz des Bogens und der Gewichte herbeiführen konnte, vorzubeugen. Die an den äufseren Enden waren durch Streben gestützt und durch Querhölzer vereinigt, um das Auswärtsgleiten der Bögen in dem Falle zu verhindern, wo das Gewicht des Zugkastens hiezu nicht ausreichend war.

Drittes Capitel.

Theoretische Betrachtungen über Natur und Intensität des Schubes, den Holzbögen und gerade Gespärre ohne Durchzüge gegen ihre Widerlager ausüben.

§. 1. Die Untertheile der Holzbögen üben immer einen Horizontalschub gegen ihre Widerlager aus.

Um klar einzusehen, dafs ein Bogen, wie auch immer seine Form und das Material, aus dem er gefertigt ist, sein mag, nothwendig einen Schub gegen seine Widerlager in horizontaler Richtung ausüben mufs, braucht man nur einen sehr einfachen Schlufs zu machen, der sich auf den bekannten Grundsatz stützt: »Druck und Gegendruck halten einander das Gleichgewicht«.

Nach diesem Grundsatze ist es augenscheinlich, dafs, wenn ein Bogen, der in Bezug auf eine Verticale durch seinen Scheitel von symmetrischer Form ist, aufser durch sein eigenes Gewicht noch durch ein auf gleiche Weise und in derselben Art auf jeder seiner Hälften vertheiltes Gewicht belastet und mit beiden Enden auf zwei Stützpunkte aufgestellt ist, die im gleichen Niveau liegen, jedes dieser Enden auf sein Unterlager eine Verticalpressung in der Richtung von oben nach unten ausübt, welche gleich der Hälfte des Gewichts des Bogens und seiner Belastung ist, ferner, dafs zu gleicher Zeit der Stützpunkt eine Gegenwirkung gegen das Ende, welches er trägt, äufsert und es mit gleicher Kraft, aber in entgegengesetzter Richtung, von unten nach oben presst.

Demgemäfs, weil also Alles in Bezug auf den Scheitel des Bogens symmetrisch ist, kann man im Gedanken die Stützen weglassen und annehmen, dafs jede Hälfte des Bogens:

1) Im Scheitel so eingemauert ist, dafs seine Tangente an diesem Punkte horizontal ist.

2) Dafs sie mit den Gewichten p_1, p_2, ... p_n, die in irgend einer Weise zwischen A und M vertheilt sind, belastet ist.

3) Dafs sie überdies der Wirkung einer Kraft P unterliegt, die gleich der Summe der Gewichte p_1, p_2, ... p_n, und dem Eigengewicht des Bogens ist, welche in M in verticaler, aber der Schwere entgegengesetzten, Richtung von M nach V wirkt.

Diese Umstände, die, hypothetischer Art, für das wirklich Bestehende an die Stelle gesetzt werden, können an der Weise, in der die Biegung des Bogens erfolgt, nichts ändern; sie kommen blofs darauf zurück, statt anzunehmen, dafs der Scheitel sich senkt, um sich den Fufspunkten zu nähern, vorauszusetzen, dafs die Enden sich erheben, um dem Scheitel näher zu kommen, was die Gröfse, um welche die anfängliche Ordinate des Scheitels des Bogens sich ändert, nicht beeinträchtigt, eben so wenig wie die Ortsveränderung, welche die verschiedenen Punkte des Bogens in horizontaler und verticaler Richtung erfahren werden, sobald das untere Ende M des Bogens nach diesen beiden Richtungen hin frei ist.

Betrachtet man nun den Bogen MN unter den eben beschriebenen Umständen, so sieht man, dafs in Bezug auf den Punkt A das Moment $P \,.\, MO$ der Kraft P immer gröfser als das Moment der Summe der Kräfte p_1, p_2, ... p_n ist, weil diese Summe gleich P ist, und weil die horizontale Entfernung GH des Schwerpunkts dieser Kräfte von der Verticalen AO nothwendig kleiner als der Hebelarm MO der Kraft P sein wird. Dasselbe wird um so mehr für irgend einen Punkt m des Bogens zwischen A und M gelten, weil nicht allein die Entfernung gh des Schwerpunkts der partiellen Kräfte, die zwischen m und M wirken, geringer als MO ist, sondern weil auch die Summe dieser Kräfte kleiner als P sein mufs.

In Bezug auf irgend einen Punkt des Bogens AM würde also die Wirkung der Kraft P, die ihn zu biegen und z. B. in die Lage $Am'M'$ zu versetzen sucht, gröfser als die Wirkung der partiellen Kräfte p_1, p_2, ... p_n sein, welche, wenn sie allein beständen, eine Biegung im entgegengesetzten Sinne hervorbringen würden.

Demgemäfs wird also der Fufs M des Bogens einen Weg $M'a$ vertical in die Höhe, und einen Weg von der Länge $M'b$ in horizontaler Richtung gemacht haben. Eigentlich stellt $M'a$ das Maafs für die Senkung des Scheitels A durch die Einwirkung der belasteten Gewichte p_1, p_2, ... p_n, dar, und $M'b$ das Maafs für die Verschiebung des Fufses, der auf seiner Unterlage gleitet, wenn sich die Reibung oder irgend eine andere Ursache diesem Gleiten nicht widersetzt.

Will man aber, dafs sich der Punkt M während der Biegung nicht horizontal verschiebe, und dafs er immer in derselben Verticale bleibe, wonach er die Form $Am''M''$ (Fig. 3. Taf. II.) annehmen wird, so ist klar, dafs man den Kräften P, p_1, p_2, ... p_n, die am Bogen angebracht sind, eine horizontale Kraft Q, die von M nach O gerichtet ist, hinzufügen mufs, die zugleich im Stande ist, die Tendenz des Punkts M, sich um $M'b$ zu verschieben, gänzlich

aufzuheben. Diese Kraft Q ist dem Schube gleich und gerade entgegengesetzt, und kann als Maafs für denselben dienen. Man sieht aufserdem, dafs diese Kraft Q niemals zu Null werden kann, denn sobald der Bogen mit irgend einem Gewichte belastet ist, dessen Schwerpunkt zwischen die Verticale durch M und die durch A fällt, besitzt er ein Streben sich zu biegen und demgemäfs die Lage des Punktes M in horizontaler Richtung zu verändern.

Die Untertheile der Holzbögen üben also immer einen Horizontalschub gegen ihre Widerlager aus.

§. 2. Die Gröfse des Schubes den ein Bogen gegen seine Widerlager an seinem Fufspunkte ausübt, ist von der Natur des zu seiner Construction verwandten Materials unabhängig und steht im geraden Verhältnisse mit der Spannweite und der Belastung, und im umgekehrten mit seinem Pfeil.

Ich beschränke mich hier auf die blofse Angabe dieser Resultate, deren Nachweis man in Nr. 42, 43, 45, 47 und 48 des Anhangs finden kann.

§. 3. Theoretische Ausdrücke für die Schübe, welche die in den gewöhnlichsten Fällen der Praxis vorkommenden Bögen gegen ihre Widerlager ausüben.

Die gewöhnlichsten Formen, welche die Praktiker den Bögen der Gespärre aus Holz oder Eisen geben, lassen sich auf drei zurückführen, nämlich: 1) Die Halbkreisform; 2) die Form eines gedrückten Bogens; 3) überhöhter Bogen von ovaler oder parabolischer Form (dessen Pfeil also die halbe Spannweite übertrifft.) Das Gewicht, welches der Bogen tragen soll, kann in verschiedener Weise auf seiner äufsern Begrenzung vertheilt sein.

1) Die Belastung kann gleichförmig auf seinem Umfange vertheilt sein, wie es der Fall ist, wenn er nur sein Eigengewicht zu tragen hat, oder wenn die Bedachung unmittelbar auf dem Bogen ruht, wie z. B. bei Zink- oder Kupfer-Bedachung.

2) Die Belastung kann auf dem Bogen so vertheilt sein, dafs auf gleiche Horizontal-Projectionen desselben gleiche Gewichte kommen, was z. B. bei den Bögen vorkommt, die mittelst gleich weit von einander entfernter Hängesäulen den Oberbau von Hängebrücken tragen, oder in Theatern etc.

In dieser Weise ist auch das Gewicht der Bedachung eines Dachgerüsts verbreitet, wenn die Zangen, welche die Sparren mit dem Bogen verbinden, in verticaler Richtung und gleichweit von einander entfernt angebracht sind.

3) Die Belastung wird nur von einem Theil des Bogens getragen, wie dies der Fall ist, wenn die Zangen, welche die Sparren mit dem Bogen verbinden, auf letzterem normal stehen. Denn hierfür leuchtet ein, dafs diejenige Zange, welche über den Verbindungspunkt des Sparrens und der verticalen Stuhlsäule geht, die letzte sein wird, die noch einen Theil des Gewichts trägt. Indessen kann, für die gewöhnlichen Neigungen, welche Dachflächen erhalten, diese Art der Gewichtsvertheilung wie mit der vorigen gleich angesehen werden.

4) Endlich kann das ganze Gewicht im Scheitel oder in irgend einem Punkt des Bogens aufgehängt gedacht werden. Die Betrachtung dieses Falls ist wesentlich für die Construction der Bogenbrücken, die z. B. jedes Mal, wenn ein beladenes Fuhrwerk sich hinüber bewegt, der Wirkung einer Belastung, deren Lage veränderlich ist, ausgesetzt sind. Diese Hypothese läfst sich auch auf Dächer anwenden, die ungleichmäfsig durch den Schnee belastet sind.

Es folge hier eine Tabelle der Gröfse der Schübe, wie sie für diese verschiedenen Fälle durch Rechnung gefunden wurden.

§. 4. Schub der Halbkreis-Bögen.

Erste Tabelle.

Art der Vertheilung des Gewichts.	Werth des Schubes $= Q$.	Bemerkungen.
Nr. 1. Das Gewicht ist gleichförmig auf dem Umfang des Bogens verbreitet.	$Q = 0{,}16\ P$	Bei Nr. 2, 3 und 4 ist in dem Gesammtgewicht, welches der Bogen trägt, sein eignes Gewicht nicht mit inbegriffen. Nr. 1 wird zur Bestimmung des Schubes dienen können, den der Bogen vermöge seines Eigengewichts ausübt; dieser Schub mufs dem hinzugefügt werden, der wegen der Belastung gegen jedes Widerlager ausgeübt wird. (Wegen der speciellen Rechnungen, die zur Bestimmung des Werthes von Q in der zweiten Columne dienen, sehe man Nr. 45, 47 und 48 des Anhangs, und beachte, dafs die Zahlen-Coefficienten dieser Werthe hier halb so grofs als die im Anhange für den Werth von Q vorkommenden sind. Denn hier bezeichnet P die Belastung des ganzen Bogens, während im Anhange P nur die durch die Hälfte des Bogens getragene Belastung bedeutet. Diese Bemerkung gilt auch für die in den Paragraphen 5 und 6 vorkommenden Werthe von Q).
Nr. 2. Das Gewicht ist gleichförmig verbreitet in Bezug auf eine Horizontale.	$Q = 0{,}22\ P$	
Nr. 3. Das ganze Gewicht ist im Scheitel aufgehangen.	$Q = 0{,}32\ P$	
Nr. 4. Das Gewicht ist in einem Punkte, der vertical über einem Viertel des Bogen-Durchmessers sich befindet, aufgehangen.	$Q = 0{,}278\ P$	

Wenn der Bogen nur auf einem Theile seines Umfanges gleichförmig belastet ist, würde man, wenn A die Gröfse des Kreisbogens für den Halbmesser $= 1$ bezeichnet, auf welchem rechts oder links vom Scheitel des Bogens die Belastung ruht, die Formel erhalten:

$$Q = \frac{P}{3{,}1415}\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin A \cos A}{A}\right)\right].$$

Sind z. B. die Dachflächen auf 3 Basis zu 2 Höhe geneigt, so folgt, dafs der Bogen auf ungefähr $\frac{2}{3}$ seines Umfangs belastet ist, und man erhält:

$$A = 1{,}04\,,\quad \sin A = 0{,}85\,,\quad \cos A = 0{,}54 \text{ und daher } Q = 0{,}23\,P^{*}).$$

Man sieht also hieraus, dafs der Schub der Halbkreis-Bögen, die den Dächern der Gebäude als Stützen dienen, weit davon entfernt Null zu sein, in den gewöhnlichsten Fällen der Praxis ungefähr zwischen einem Viertel und einem Drittel der Gesammtbelastung, die das Gespärre zu tragen hat, variirt. Für ein Gebäude von 20ᵐ Weite also, wo die Belastung jedes Gespärres bis zu 15000 Kilogrammen steigen kann, übt jeder Fufs desselben einen Horizontal-Schub nahe an 5000 Kilogrammen aus. Ein so beträchtlicher Schub verdient Gegenstand einer reiflichen Ueberlegung zu werden, wenn nicht schwere Unfälle durch ihn herbeigeführt werden sollen. Es war also von Wichtigkeit, diese theoretischen Angaben durch Thatsachen zu bewahrheiten, und zu diesem Zwecke wurden die Versuche unternommen, von denen im folgenden Capitel die Rede sein wird.

§. 5. Gröfse des Schubes, den die überhöhten oder gedrückten Bögen gegen jedes ihrer Widerlager ausüben.

Zweite Tabelle.

Art der Vertheilung der Belastung.	Werth des Schubes $= Q$.	Bemerkungen.
Nr. 1. Das Gewicht ist in Bezug auf eine Horizontale gleichförmig vertheilt.	$Q = 0{,}25\frac{PX}{Y}$.	P ist das Gesammtgewicht, welches der Bogen trägt; X die halbe Spannweite (halbe Sehne), Y der Pfeil oder die Höhe. Wenn der Bogen gedrückt ist, kann man sich der Formel Nr. 1 bedienen, um den durch sein Eigengewicht verursachten Schub zu berechnen. (Ueber die Berechnung der nebenstehenden Werthe von Q siehe Nr. 45, 47 und 48 des Anhangs.)
Nr. 2. Das ganze Gewicht hängt im Scheitel.	$Q = 0{,}39\frac{PX}{Y}$.	
Nr. 3. Das Gewicht ist in einem Punkte aufgehangen, der vertical über einem Viertel der ganzen Spannweite liegt.	$Q = 0{,}28\frac{PX}{Y}$.	

*) Die Nachrechnung des obigen Beispiels hat ergeben: $A = 1{,}17595$ (zum Winkel von 67°22′48″ gehörig) $\sin A = 0{,}9231$, $\cos A = 0{,}3846$, und daraus nach der Formel unten auf der vorigen Seite: $Q = 0{,}2072\,P$. Die Rechnungsweise, durch welche der Autor zu den im Texte angegebenen Werthen gelangt ist, haben wir nicht auffinden können. d. U.

§. 6. Gröfse des Schubes der Gespärre aus geraden Hölzern.

Die Betrachtungen, durch welche sich das Vorhandensein eines Schubes bei den Bögen herausstellte, lassen sich gleichfalls auf die aus geraden Hölzern hergestellten Gespärre anwenden. Der Schub eines geraden Gespärres wie das auf Taf. XIV. gezeichnete, welches man gewöhnlich, um ein sogenanntes Bogengespärre zu bilden, mit einem Bogen vereinigt, wird durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$Q = 0{,}125\, P \left(\frac{a^2 \tang \omega \,(5a + 12a') + 8a'^2 \tang \alpha}{a^2 \tang \omega \,(3b' + 2b) + 2a'^2 b' \tang \alpha} \right). \quad (A)$$

(Siehe Nr. 42 des Anhangs.)

In dieser Formel bezeichnet:

P das ganze durch das Gespärre getragene Gewicht, vorausgesetzt, dafs es gleichförmig über die Sparren verbreitet ist.

a und b die Horizontal- und Vertical-Projectionen des Sparrens.

a' und b' die Horizontal- und Vertical-Projectionen der Stuhlsäule; (des Ständers, Pfostens.)

ω und α sind die Winkel, welche die Sparren und die Stuhlsäule mit der Verticale einschliefsen.

Wie wir später sehen werden, ist es zweckmäfsig, dem Pfosten oder der Stuhlsäule eine geringe Neigung gegen das Innere zu geben, so dafs α ungefähr 3° betrage. Die Neigungen des Daches werden wenig von denen variiren, wo der Sparren Winkel von 45°, 57° oder 65° mit der Verticale einschliefst; wenn man also in der obigen Formel (A) $\alpha = 3°$ und nach einander $\omega = 45°$, 57° und 63° setzt, findet man:

für $\omega = 45°$; $Q = 0{,}197\, P$
- $\omega = 57°$; $Q = 0{,}220\, P$
- $\omega = 63°$; $Q = 0{,}227\, P$

Siehe Nr. 43 des Anhangs.

Vergleicht man diese Werthe mit dem des Schubes, den ein, von einem gleichen und auf dieselbe Weise verbreiteten Gewichte P, belasteter Bogen ausübt, welcher Werth zu:

$$Q = 0{,}22\, P$$

gefunden wurde, so wird man aus dieser Vergleichung einen Schlufs ziehen können, welcher der Meinung der meisten Constructeure sehr entgegengesetzt ist, nämlich:

Dafs in den gewöhnlichen Fällen der Praxis ein Halbkreisbogen eben so viel Schub ausübt als ein gerades Gespärre ohne Durchzug, mit welchem ersterer, um ein Bogengespärre zu bilden, vereint wird, und demgemäfs würde man, wenn man die Querschnitts-Dimensionen dieses Dachstuhls vergröfserte, den Bogen weglassen können, ohne dadurch einen beträchtlicheren Horizontalschub gegen die Widerlager auszuüben. Es bleibt nur noch übrig zu untersuchen, ob die Erfahrungen mit dieser Theorie übereinstimmen.

Viertes Capitel.

Versuche über den Schub der Holzbögen

§. 1. Frühere über diesen Gegenstand gemachte Versuche.

So viel ich auch in den verschiedenartigsten Werken nachgesucht habe, konnte ich doch nur eine kleine Anzahl solcher finden, in denen von Versuchen die Rede war, die zum Messen des Horizontalschubes der Bögen oder Gespärre gedient hätten. Der Oberst Emy berichtet in seiner Beschreibung eines neuen Bogensystems, welches für grofse Gespärre anwendbar sei, dafs, nachdem die Untertheile eines Gespärres des Wagenschuppens zu Marac auf platte Unterlagen von Eichenholz, die unmittelbar auf dem Boden ruhten, aufgesetzt, und der Bogen mit einem provisorischen Gewichte gleich der später zu tragenden Belastung beschwert worden sei, er beobachtet habe: 1) Dafs die Unterlagen nicht von der Stelle rückten; 2) dafs sich die Tangenten an den Anfängen des Bogens etwas nach aufsen hinneigten: woraus er glaubte schliefsen zu können, dafs der übrigens nur sehr schwache Schub die Mauern unter den Anfängen der Bögen eher nach innen als nach aufsen hin zu drehen suchte.

Der Capitain Chayrou hat in seinen Notizen über das Gespärre zu Libourne, dessen Anfertigung er mit dem gröfsten Erfolge leitete, bemerkt, dafs die Bögen des Systems von Emy kein Bestreben hätten, flacher zu werden, wenn sie sich selbst überlassen würden, und dafs, an Ort und Stelle gebracht, sie ihre Form nicht veränderten, woraus er gleichfalls den Schlufs zieht, dafs dieselben keinen Schub ausübten.

Im Bande IX. zweiter Abschnitt der Annalen des See- und Coloniewesens (annales maritimes et coloniales) finden sich Tabellen mit den Resultaten der Versuche, die der Ober-Ingenieur Reibell zu Lorient über den Bruchwiderstand und die Veränderung der Elasticität von Fichtenbohlen (planches de pin), die nach dem System des Philibert de l'Orme zusammengesetzt waren, angestellt hatte. Bei einigen dieser Versuche konnten die abgerundeten und mit Seife geschmierten Untertheile der Bögen auf ihren Auflagern gleiten, und man beobachtete den Widerstand des Bogens für verschiedene Stellungen der Enden desselben. Da die Tabellen zugleich das nöthige Gewicht in Kilogrammen enthalten, um den Fufs des Bogens in verschiedenen Stellungen beharren zu lassen, konnte ich mit Berücksichtigung der passiven Widerstände die Schübe dieser Bögen daraus herleiten. Die Arbeit Reibell's ist mir also sehr nützlich gewesen, da sie mich der Mühe überhob, eine sehr grofse Anzahl Versuche anzustellen. Ich habe diese seine Resultate mit Vertrauen aufgenommen, weil sie mir als

genau und gewissenhaft erschienen, und habe nur bedauert, dafs die Tabellen nicht von einem Texte begleitet waren, der den Zweck der Untersuchungen des Autors klar auseinandersetzte.

§. 2. Resultat der über den Schub der Bögen oder Halbkreisbögen angestellten Versuche, wenn diese entweder ihr Eigengewicht oder eine Belastung im Scheitel zu tragen hatten.

Die Formel, welche den Werth des Schubes Q für einen Halbkreisbogen, als Function des Gewichts p dieses Bogens giebt, ist $Q = 0{,}16\,p$ (Cap. III. §. 4.)

Die Formel, welche den von einer ganz im Scheitel aufgehangenen Belastung P herrührenden Schub giebt, ist $Q = 0{,}32\,P$ (Cap. III. §. 4.)

Es folgen die Resultate der mit mehren Bögen unter den Umständen, worauf diese Formeln sich beziehen, gemachten Versuche.

Erste Tabelle,
die von den Halbkreisbögen, in Folge ihres blofsen Eigengewichts, ausgeübten Schühe enthaltend.

Angabe der Bögen. (Siehe Cap. II. §. 1.)	Gewicht der Bögen.	Beobachteter Schub.	Schub nach der Formel berechnet: $Q = 0{,}16\,p$.	Bemerkungen.
	k	k	k	
Bogen aus gebogenem Holze Nr. 1.	216,00	37	34,56	Die Schübe, welche die Bögen Nr. 2 u 3 in Folge ihres Eigengewichts ausübten, konnten nicht beobachtet werden.
Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr 4.	176,00	29	28,16	
idem Nr. 5.	94,25	16	15,08	
idem Nr. 6.	90,00	15	14,40	

Zweite Tabelle,
die von den Bögen, in Folge einer in ihrem Scheitel aufgehängten Last, ausgeübten Schube enthaltend, abgesehen von dem durch ihr Eigengewicht verursachten Schube.

Angabe der Gespärre.	Belastung der Bögen im Scheitel.	Schub, berechnet nach der Formel $Q = 0{,}32\,P$.	Beobachteter Schub.	Bemerkungen.
	k	k	k	
Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr. 5.	32	10,24	12	Die Beobachtungsmittel liefsen nicht zu, durch den Versuch den Schub mit einer gröfsern Annäherung als 3k über oder unter dem wirklich Statt findenden Schube zu bestimmen.
idem –	56	19,92	18	
idem –	68	21,76	24	
idem –	92	31,28	29	
idem Nr. 4.	152	48,64	48	
Bogen aus gebogenem Holze Nr. 1.	401	128,32	128	
Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr. 4.	416	133,12	132	
Bogen aus gebogenem Holze Nr. 1.	425	136,00	152	
Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr. 4.	464	148,48	150	
Bogen aus gebogenem Holze Nr. 1.	605	193,60	188	

Mittelst dieser beiden Tabellen erhält man den gesammten Schub, den ein mit einem bestimmten Gewicht belasteter Bogen ausübt, wenn man zu dem vom Eigengewicht herrührenden Schube des Bogens den in Folge der Belastung hervorgerufenen addirt; z. B für den Bogen Nr. 1 aus gebogenem Holze, der mit 401^k im Scheitel belastet ist, erhielte man $37_k + 128^k = 165^k$ für den beobachteten Schub, während der berechnete $162^k,8$ sein würde. Die Uebereinstimmung in diesen Tabellen, zwischen den Resultaten der Beobachtung und denen der Rechnung, wird dem, der da weiſs, wie leicht sich Ursachen zu Fehlern finden, die auf dergleichen Operationen einwirken, gewiſs genügend erscheinen. Indeſs könnte man fragen, weſshalb die Versuche nicht zahlreicher, und weſshalb sie nicht in vollständigen und auf einander folgenden Reihen für jeden Bogen angestellt sind. Dies liegt einfach daran, daſs die Bögen schon unter ihrem Eigengewicht ihre Form veränderten, und daſs, sobald die Belastung nicht genau mit ihrem Schwerpunkte in der Verticale durch den Scheitel hing, sie sich seitlich warfen und unregelmäſsige Krümmungen, die man in den Figuren der Tafeln VI. und VII. dargestellt sieht, annahmen, die jeden Augenblick ihren Bruch besorgen lieſsen.

Ich muſs gestehen, daſs ich diese Resultate im Voraus nicht erwartet hatte. Wenn ich von der Widerstandsfähigkeit dieser Bögen keine übermäſsige Vorstellung gehabt hätte, so hätte ich ihnen einen beträchtlicheren Querschnitt geben lassen, dagegen die Kasten und das Tauwerk, was zu den Versuchen mit diente, leichter gemacht. Auf diese Weise hätte ich Mittel gehabt, zahlreichere Versuche anstellen zu können, ohne befürchten zu müssen, daſs die Bögen zu den Versuchen über vollständige Systeme von Gespärren würden unbrauchbar werden, welchen letzteren Versuchen ich eine gröſsere Wichtigkeit beilegte als den vorhergehenden, und die demgemäſs in gröſserer Folge und in vollständigerer Weise angestellt sind. Aus diesen Gründen kann ich hier auch nur eine kleine Anzahl Versuche über halbkreisförmige Bögen mittheilen, die in einem anderen Punkte als im Scheitel belastet sind.

Dritte Tabelle.

Versuche mit dem Bogen Nr. 1 aus gebogenem Holze, wenn derselbe in einem Punkte vertical über einem Viertel des Durchmessers belastet wurde.

Belastung des Bogens.	Beobachteter Schub.	Berechneter Schub.	Bemerkungen.
k	k	k	Die Schube sind nach der Formel $Q = 0,278\,P$ (Cap. III. §. 4) berechnet. Sie sind etwas geringer als die beobachteten, was daher rührt, daſs der Bogen sich sehr bog und daher die halbe Sehne des Bogens gröſser als der Pfeil wurde.
341	116	94.79	
473	140	131,49	
521	164	144,83	
605	188	168,19	

Vierte Tabelle.

Versuche mit halbkreisförmigen Bögen, deren Belastung in Bezug auf die Horizontale gleichförmig vertheilt war.

Belastung des Bogens.	Beobachteter Schub.	Berechneter Schub.	Angabe der Bögen.	Bemerkungen.
k	k	k		Die zur Berechnung der Schube hier gebrauchte Formel ist: $Q = 0{,}22\ P$ (Cap. III. §. 4.)
1057	274	232.54	Bogen Nr. 1.	
298	75	65.56	Bogen Nr. 2.	

§. 3. **Resultate der mit den gedrückten Bögen, die im Scheitel belastet waren, gemachten Versuche.**

Der einzige Bogen, der in Untersuchung gezogen wurde, ist der Nr. 7. (Cap. II. §. 1.)

Dieser Bogen, dessen Gewicht zwischen 306 bis 315^k betrug, sollte zur Bestimmung des Elasticitäts-Coefficienten für aus mehren Schienen (lames) gebildete Körper dienen, die durch Schraubbolzen und Bänder vereinigt sind, und er hat diesen Zweck sehr gut erfüllt, wenngleich seine Querschnitts-Dimensionen von $0^m{,}28$ zu $0^m{,}15$, sein grofses Gewicht und die bedeutenden Belastungen, welche man, um ihn zu biegen, aufbringen mufste, die Beobachtung der Schübe sehr erschwerten. Ueber das Vorhandensein derselben war wenigstens kein Zweifel, denn die Enden des Bogens drangen wegen seines Eigengewichts und der aufgebrachten Belastung mehre Millimeter tief in Stücke Tannenholz ein, die hinter ihm, um ihn zu halten, befestigt waren. Die Schwierigkeit lag also im genauen Messen der Schübe, und letzteres konnte z. B. für den Schub, den der Bogen vermöge seines Eigengewichts ausübte, nicht geschehen.

Der platt auf dem Boden liegende Bogen hatte, nachdem die Rüsthölzer, die zum Krümmen der Schienen gedient hatten, entfernt waren, eine $12^m{,}12$ grofse Sehne auf dem mittleren Bogen gemessen. Man machte also auf den Unterlagen aus Quadern Merkzeichen in $12^m{,}12$ Entfernung, um die Enden des mittleren Bogens, wenn sie auf den Rollen ruhten, darüber bringen zu können. Aber als man den Bogen bis an die Auflager gebracht hatte, fand sich, dafs die Sehne bis zu $12^m{,}18$ gröfser und der Pfeil um $0^m{,}03$ kleiner geworden war. Um die Sehne bis auf ihre anfängliche Länge zu verkürzen, mufste man in jeden Zugkasten ein Gewicht von 408^k bringen. Dies Gewicht war zu beträchtlich, als dafs es von seinem Schube hätte herrühren können. Danach hatte wahrscheinlich der Bogen bei den Bewegungen, die mit ihm vorgenommen wurden, um ihn an seinen Platz zu bringen, einige Formänderung erfahren, was sich aus der Art seiner Zusammensetzung wohl erklären läfst. In Folge dieser Formänderung mufste man ihn, um ihm seine anfängliche Dimension wiederzugeben, biegen, indem man die Enden einander näherte, wozu eine beträchtliche Kraft nöthig gewesen sein mufs.

In der folgenden Tabelle hat man also von dem Schube das Gewicht abgezogen, welches nöthig war, um die Enden des Bogens über die Merkzeichen zurückzubringen, so dafs sie nur die Schübe angiebt, die von den in der Mitte des Bogens aufgehängten, in einen Kasten gelegten Gewichten herrühren. Sie stimmen sehr gut mit denen überein, welche die Berechnung mittelst der Formel $Q = 0{,}39 \frac{PX}{Y}$ (Cap. III. §. 5) giebt, welche, weil $X = 6^m{,}06$ und $Y = 2^m{,}32$ sind, zu $Q = 1{,}01\,P$ wird.

Belastung des Bogens mit Inbegriff seines Eigengewichts.	Beobachteter Gesammtschub.	Beobachteter Schub, von der Belastung des Bogens allein herrührend.	Schub, allein von der Belastung des Bogens herrührend nach der Formel $Q = 1{,}01P$.	Bemerkungen.
k	k	k	k	
Gewicht des Bogens 315	408	—	—	Die Zugkasten vermochten kein gröfseres Gewicht als 700k aufzunehmen, wefshalb nicht mehr Versuche angestellt werden konnten.
id. hinzu 152	558	150	153,52	
id. hinzu 272	680	272	274,72	

Es wird nicht überflüssig sein zu bemerken, dafs man, um bei den angegebenen zwei Versuchen der vorstehenden Tabelle den Fehler zu vermeiden, welchen der durch das Eigengewicht des Bogens erzeugte Schub herbeiführen konnte, darauf achtete, nicht so viele Gewichte in den Zugkasten zu legen, dafs die Enden des mittleren Bogens sogleich genau über den Merklinien standen. Man liefs sie jedes Mal 3 bis 4 Millimeter hinter der früher eingenommenen Stellung, um sicher zu sein, dafs man schwächere Schube als die wirklich bestehenden beobachtet habe, und ich glaube, dafs auf diese Weise eine Art Ausgleichung mit der rollenden Reibung und der Steifigkeit des Seils herbeigeführt wurde, welche beiden Widerstände ungefähr $\frac{3}{40}$ des Schubes gleich kamen.

§. 4. Versuche über den Schub der Holzbögen, entlehnt aus einer Arbeit von Reibell, Ober-Ingenieur und Director der Seebauten zu Lorient.

Die ausgedehnte und gewissenhafte Arbeit Reibell's, welche §. 1 dieses Capitels erwähnt wurde, kann glücklicher Weise zur Vervollständigung und Bestätigung der durch die vorhergehenden Versuche erhaltenen Resultate dienen.

Die Bögen, von denen Reibell Gebrauch machte, hatten abgerundete und mit Seife geschmierte Enden, so dafs sie unbehindert auf einem eben so geschmierten Stücke Eichenholz gleiten konnten. Um ein Mittel zur Abschätzung der Wirkung des Schubes zu erhalten, hatte er ein Seil über 2 mit den Enden des Bogens verbundene Zugwinden gelegt, und nachdem dies über eine dritte, oben an einem Rüstbaume aufgehängte, Scheibe geleitet war, Gewichte daran gehängt. Man

mufste auf diese Weise 125^k aufhängen, um die Steifheit des Seils zu überwinden, wefshalb diese 125^k also von dem beobachteten Schube zu subtrahiren sind.

Es mufs ebenfalls bemerkt werden, dafs Reibell bei seinen Versuchen zuerst die Enden des Bogens sich von einander entfernen liefs und sie dann durch Anhängen von Gewichten an das Tau, welches sie zusammenzog, wieder zurückbrachte, woraus dann folgt, dafs der beobachtete Schub um den Werth der Reibung der Enden des Bogens auf der Unterlage von Eichenholz vermehrt war, welcher Fehler also noch corrigirt werden mufste. Nachdem endlich alle Correctionen gemacht sind, mufs das Resultalt durch zwei dividirt werden.

Bei der Berechnung der folgenden Tabelle hat man die Reibung der Enden des Bogens zu sechzehn Hunderttheilen der Pressung geschätzt, so dafs man also, wenn man P das Gesammtgewicht des Bogens und seiner Belastung und Q_1 den beobachteten Schub nennt, für den corrigirten Schub erhält:

$$Q = \tfrac{1}{2}\left[Q_1 - (0{,}16\,P + 125^k)\right].$$

Erste Tabelle.

Versuche mit Bögen, wo die Belastung in ihrem Scheitel aufgehängt war.

Angabe der Bögen.	Gewicht, welches der Bogen trug.	Beobachteter Schub.	Corrigirter Schub.	Berechneter Schub.	Zur Berechnung dienende Formeln.
Halbkreisbogen $15^m,80$ Durchmesser. (A. M. Nov. 1837 p. 1076.)	Sein Gewicht = 756^k Hinzu 2063 2819	1581	552	Durch sein Gewicht $121{,}00^k$ Wegen Belastung 454,00 575,00	$Q = 0{,}16\,P$ $Q = 0{,}32\,P$ (§. 4. Cap. III.)
Bogen von $6^m,35$ halber Sehne und $4^m,23$ Pfeil. (A. M. Nov. 1837 p. 1099.)	Sein Gewicht = 494 Hinzu 392 886	1056	390	Durch sein Gewicht 181,80 Wegen Belastung 231,28 413,08	$Q = 0{,}25\,P\,\frac{X}{Y}$ $Q = 0{,}39\,P\,\frac{X}{Y}$ (§. 5. Cap. III.)
Derselbe.	Sein Gewicht = 490 Hinzu 542 1032	1281	495	Durch sein Gewicht 181,30 Wegen Belastung 319,78 501,08	Dieselben.
Bogen von $6^m,35$ Durchmesser. (A. M. Nov. 1837 p. 1090.)	Sein Gewicht = 588 Hinzu 243 831	606	174	Durch sein Gewicht 83,08 Wegen Belastung 77,66 160,74	$Q = 0{,}16\,P$ $Q = 0{,}32\,P$ (§. 4. Cap. III.)

Bemerkung. (A. M. Nov. 1837 p. 1090) heifst: Annales maritimes et coloniales 22e année, 2e serie, Novembre 1837, Nr. X. page 1090, oder Annalen des See- und Colonie-Wesens 22. Jahrgang, 2. Abschnitt, November 1837 Nr. X. Seite 1090 dieses Bandes.

Zweite Tabelle.

Versuche mit Bögen, deren Belastung in Bezug auf die Horizontale gleichförmig verbreitet war.

Angabe der Bögen.	Gewicht, welches der Bogen trug.	Beobachteter Schub.	Corrigirter Schub.	Berechneter Schub.	Zur Berechnung dienende Formeln.
Bogen von $7^m,90$ halbe Sehne u. 5,26 Pfeil. (A. M. Nov. 1837 p. 1083.)	k Sein Gewicht = 632 Hinzu 840 1472	1056	348	k 471,00	$Q = 0,25\, P \frac{X}{Y}$ (§. 5. Cap. III.)
Bogen von 6,35 Halbmesser. (A. M. Nov. 1837 p. 1091.)	Sein Gewicht = 588 Hinzu 1310 1898	831	201	Durch sein Gewicht 83,08 Wegen Belastung 288,20 371,28	$Q = 0,16\ P$ $Q = 0,22\ P$ (§. 4. Cap. III.)
Derselbe.	Sein Gewicht = 588 Hinzu 2028 2616	2081	769	Durch sein Gewicht 83,08 Wegen Belastung 523,20 606,28	Dieselben.
Bogen von 4,40 halbe Sehne u. 2,93 Pfeil. (A. M. Nov. 1837 p. 1108.)	Sein Gewicht = 340 Hinzu 2079 2419	1530	677	681,62	$Q = 0,25\, P \frac{X}{Y}$ (§. 5. Cap. III.)

Die Bögen, mit denen Reibell Versuche anstellte, bestanden aus zwei Lagen Bohlen, aus dem dort einheimischen Fichtenholze (pin), die aus krummen Stücken geschnitten waren und deren Dicke zwischen $0^m,06$ bis $0^m,09$ jede Lage variirte. Beide Bohlenlagen wurden mittelst starker Eichenpflöcke und Nägel vereinigt. Die Construction dieser Bögen war also von derjenigen der zu Metz den Versuchen unterworfenen gänzlich verschieden. Diese Uebereinstimmung unter den Versuchen, welche unter ganz verschiedenen Umständen und von Personen, die in gar keiner Beziehung mit einander standen, angestellt waren, erscheint für die Theorie des Schubes von Bögen, wie sie im dritten Capitel entwickelt worden ist, sehr günstig, und man ist defshalb berechtigt, aus den gesammten angeführten Thatsachen folgende Schlüsse zu ziehn:

1) Die halbkreisförmigen oder gedrückten Bögen üben einen Horizontalschub gegen ihre Widerlager aus.

2) Der vom Eigengewichte des halbkreisförmigen Bogens herrührende Schub erreicht nicht ganz ein Fünftheil dieses Gewichts.

3) Der von der Belastung eines Halbkreisbogens herrührende Schub kann von einem Viertel bis zu einem Drittel des Gesammtgewichts der Belastung sich erhöhen, je nach der Weise der Verbreitung des Gewichts auf dem Umfange des Bogens.

4) Die Schübe, welche die gedrückten Bögen ausüben, verhalten sich zu denen bei Halbkreisbögen wie ihre halbe Sehne sich zu ihrem Pfeil verhält.

5) Die Kraft, mit welcher die Enden eines Bogens in horizontaler Richtung gegen die Widerlager wirken, ist von der Art seiner Construction unabhängig, wenn nur die übrigen Umstände in Bezug auf seine Form und Dimensionen, Gröfse und Vertheilung der Last dieselben bleiben.

Die gröfsere oder geringere Biegsamkeit der Bögen ändert also nichts an der Intensität des Schubes, nur mufs man dabei bemerken, dafs die Wirkungen dieses Schubes gefährlicher werden können, wenn der Bogen biegsam ist, als wenn er es nicht ist.

In der That würde auch, wenn die Stabilität der Widerlager keinen genügenden Widerstand der Wirkung des Schubes entgegensetzte, die horizontale Ortsveränderung des Fufses eines biegsamen Bogens gröfser als die eines sehr steifen Bogens sein, und ein Umwerfen der Mauer oder des Pfeilers, die als Stütze dienen, würde unter Einwirkung des ersten Bogens eher, als unter der des zweiten erfolgen. Man könnte sich selbst einen Bogen denken, der einen solchen Grad von Steifheit besäfse, dafs die horizontale Ortsveränderung seiner Enden unmerkbar, also die Wirkung des Schubes gleichsam Null wäre, obgleich die Gröfse dieser Kraft sehr bedeutend sein könnte. Diese letzte Voraussetzung kann sich in der Praxis nie verwirklichen, indessen müssen wenigstens diese Betrachtungen die Constructeure veranlassen, den Holzbögen, die durch Mauern getragen werden, die gröfstmöglichste Steifheit zu verleihen.

Fünftes Capitel.

Resultate der Versuche mit Gespärren ohne Durchzüge.

§. 1. Tabelle der Schübe, welche die Bogengespärre blofs wegen ihres Eigengewichts gegen ihre Widerlager ausüben, verglichen mit dem Schube des einfachen geraden Gespärres.

Angabe der Gespärre.	Gewicht der Gespärre.	Beobachteter Schub.	Nach der Formel $Q = 0{,}22\,P$ berechneter Schub.	Bemerkungen.
Einfaches gerades Gespärre Nr. 8 ohne Durchzug.	146^k	41^k	43^k,12	
Gespärre Nr. 9 mit Bogen aus gebogenem Holze und mit verticalen Zangen.	341	77	75,02	
Gespärre Nr. 10 mit Bogen aus gebogenem Holze und mit verticalen Zangen.	334	77	73,48	
Gespärre Nr. 11 mit Bogen aus gebogenem Holze, die Zangen normal auf die Krümmung.	334	77	73,48	
Gespärre Nr. 12 mit Bogen aus hochkantigen Bohlen und verticalen Zangen.	335	77	73,70	
Gespärre Nr. 13 mit Bogen aus hochkantigen Bohlen und mit verticalen Zangen.	324,50	77	71,39	
Gespärre Nr. 14 aus geraden Hölzern.	215	47,30	47,30	
Gespärre Nr. 15 aus geraden Hölzern.	215	47	47,30	

Die Formel $Q = 0{,}22\,P$ folgt, wenn man in die Formel:

$$Q = \frac{P}{8}\left(\frac{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(5a + 12a') + 8a'^3 \operatorname{tang}\alpha}{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(3b' + 2b) + 2a'^2 b' \operatorname{tang}\alpha}\right)$$

(§. 6. Cap. III.) folgende Werthe, die sich auf das einfache gerade Gespärre Nr. 8 beziehen, substituirt:

a Länge der Horizontal-Projection des Sparrens = 5,64.

b Länge der Vertical-Projection des Sparrens = 3,66.

a' Länge der Horizontal-Projection der Stuhlsäule = 0,56.

b' Länge der Vertical-Projection der Stuhlsäule = 3,66

tang ω = 1,541, tang α = 0,153.

Diese Formel findet sich durch die Versuche nicht allein für das gerade Gespärre bewahrheitet, sondern auch für die Verbindung dieses Gespärres mit den Bögen Nr. 2 und 3 aus gebogenem Holze und den Bogen Nr. 5 und 6 aus hochkantigen Bohlen, wie die folgende Tabelle zeigen wird.

(Ueber die Angabe der Gespärre sehe man §. 1. Cap. II.)

§. 2. Tabelle der Schübe, welche die Bogengespärre oder geraden Gespärre ohne Durchzug zufolge der Belastung, welche sie tragen, ausüben, abgesehen von den von ihrem Eigengewicht herrührenden.

Belastung, welche die Gespärre, gleichförmig auf dem Sparren verbreitet, tragen.	Schub nach der Formel $Q = 0{,}22\,P$, blofs für die Belastung berechnet	Beobachtete Schübe, abgezogen die durch das Eigengewicht der Gespärre verursachten.							
		Einfaches Gespärre Nr. 8, ohne Bogen und Durchzug.	Gespärre Nr. 9, mit Bogen aus gebogenem Holze.	Gespärre Nr. 10, mit Bogen aus gebogenem Holze.	Gespärre Nr. 11, mit Bogen aus gebogenem Holze.	Gespärre Nr. 12, mit Bogen aus hochkantigen Bohlen.	Gespärre Nr. 13, mit Bogen aus hochkantigen Bohlen.	Gespärre Nr. 14, aus geraden Hölzern.	Gespärre Nr. 15, aus geraden Hölzern.
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
288	63,36	66	66	60	60	60	60	60	60
504	110,88	103	120	108	112	108	120	120	120
760	167,20	168	168	168	162	156	168	–	180
936	205,92	204	228	–	228	192	228	240	240
1368	300,93	300	336	324	336	300	360	360	384
1692	367,84	360	385	372	–	372	456	468	480
2016	443,52	–	–	424	–	468	564	540	588
2232	491,04	–	–	480	–	528	–	–	–
2448	538,56	–	–	–	–	–	–	–	–

Diese Tabelle und die im vorigen Paragraphen zeigen, dafs die Formel

$$Q = 0{,}125\,P\left(\frac{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(5a + 12a') + 8a'^3 \operatorname{tang}\alpha}{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(3b' + 2b) + 2a'^2 b' \operatorname{tang}\alpha}\right) \quad (§.\ 6\ \text{Cap. III.}),$$

die für den besonderen Fall der zuletzt untersuchten Gespärre, sich auf $Q = 0{,}22\,P$ reducirt, eben so wohl den Schub der Systeme darstellt, die aus in geraden Gespärren eingerahmten Bögen bestehen, deren Sparren auf 3 Basis zu 2 Höhe geneigt sind, als auch den Schub dieses geraden Gespärres allein. Sie bestätigt also vollkommen das, was durch die Theorie gefunden wird (§. 6 Cap. III), dafs nämlich für die gröfste Zahl der in der Praxis möglicher Weise vorkommenden Fälle das Vorhandensein des Bogens keinen Einflufs auf die Verminderung des Horizontalschubes des Systems übt, von dem er einen Theil ausmacht.

Was die zwei aus geraden Hölzern gebildeten Gespärre, Nr. 14 und 15, betrifft (siehe die Fig. auf Taf. XXI. und XXII.), so kann man darüber eine sehr interessante Beobachtung machen. Man bemerkt nämlich, dafs für nicht sehr bedeutende Belastungen die Schübe dieser beiden zusammengesetzten Gespärre merklich dieselben, wie die des einfachen Gespärres Nr. 8 sind, dafs sie sich jedoch von diesen in dem Mafse entfernen, wie die Belastung wächst. Es erklärt sich dies leicht durch die blofse Ansicht der Figuren der Gespärre Nr. 14 und 15. Betrachtet man sie genauer, so sieht man ein, dafs zuerst der äufsere Theil des Gespärres, d. h. die Sparren AA' und die Stuhlsäulen $A'B$ die ganze Belastung tragen werden, und dafs der Schub dann gleich demjenigen ist, welcher Statt fände, wenn dieser Theil des Gespärres allein da wäre. So wie aber die Verbindungen mehr in einander gedrängt werden, gelangt der innere Theil des Gespärres zur Wirkung, und die Schübe werden Mittelwerthe, aus denen die vom oberen Theile

des Gespärres herrühren, und denen die bei einem Gespärre Statt fänden, welches aus der unteren Stuhlsäule und dem Sparren zusammengesetzt wäre; wenn endlich der Sparren sich merklich biegt, wird die zweite (untere) Stuhlsäule den gröfsten Theil des Gewichts tragen, und die Schübe werden dann den obigen Mittelwerth überschreiten. Man kann dies baldigst durch eine Berechnung nachweisen.

Wenn man in der Formel

$$Q = \frac{1}{8} P \left(\frac{a^2 \operatorname{tang} \omega (5a + 12a') + 8a'^2 \operatorname{tang} \alpha}{a^2 \operatorname{tang} \omega (3b' + 2b) + 2a'^2 b' \operatorname{tang} \alpha} \right) \text{ (§. 6 Cap. III.)},$$

für a und b die Horizontal- und Vertical-Projection des Theils des Sparrens setzt, der zwischen dem Scheitel des Gespärres und dem Punkte liegt, wo sich die untere Stuhlsäule in den Sparren einsetzt, und weiter für a' und b' die Horizontal- und Vertical-Projection dieser letztern Stuhlsäule, so hat man:

$a = 4^m{,}50$, $b = 3^m{,}10$, $a' = 3^m{,}55$, $b' = 3^m{,}60$; $Q = 0{,}33\,P$.

Berechnet man von Neuem mittelst dieser Formel den Schub der geraden zusammengesetzten Gespärre, so wird man folgende Tabelle erhalten:

Belastung der Gespärre Nr. 14 und 15.	Schübe nach der Formel $Q = 0{,}22\,P$ berechnet.	Schübe nach der Formel $Q = 0{,}33\,P$ berechnet.	Mittelwerth zwischen den beiden Resultaten der Rechnung.	Beobachteter Schub. Gespärre Nr. 14.	Beobachteter Schub. Gespärre Nr. 15.
k	k	k	k	k	k
288	63,36	95,04	79,20	60	60
304	110,88	166,32	138,60	120	120
760	167,20	250,80	209,00	-	180
936	205,92	308,00	256,46	240	240
1368	300,96	451,44	372,00	360	384
1692	367,84	554,13	468,98	468	480
2016	443,52	665,28	553,90	540	588

Die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlenwerthe scheinen die aufgestellte Hypothese, wie die Schübe bei den aus geraden Hölzern zusammengesetzten Gespärren zu Stande kommen, zu bestätigen, wefshalb sich denn aus den in diesem Capitel enthaltenen Thatsachen folgende Schlüsse ziehen lassen:

1) Die Bogengespärre üben einen Schub aus, der, abgesehen von dem Schube wegen ihres Eigengewichts, gleich dem des geraden Gespärres allein ist, so dafs also das Vorhandensein des Bogens ohne Einflufs auf die Verminderung dieses Schubes ist.

2) Der Horizontalschub eines geraden Gespärres, wie das auf Taf. XXII. dargestellte, ist ein Mittelwerth zwischen dem eines geraden Gespärres, welches aus dem Pfosten BA' und dem Sparren AA' besteht, und dem, welchen ein anderes Gespärre ausübt, das aus der Stuhlsäule BB' und dem Sparren AA' gebildet wird.

Sechstes Capitel.

Theoretische Betrachtungen über die Biegung der Bögen, der Bogengespärre und der geraden Gespärre ohne Durchzüge.

§. 1. Ueber die Biegsamkeit der Bogengespärre und die Folgen die daraus in Bezug auf die Stabilität ihrer Stützmauern sich ergeben.

Derjenige Theil der Mauer, welcher in gleicher Horizontale mit den Enden des Bogens liegt, ist es nicht allein, wogegen die Gespärre mit Halbkreisbögen horizontale Pressungen ausüben. In Folge ihrer Biegung ereignet es sich auch, dafs sie gegen den höchsten Punkt dieser Mauern wirken, und diese Einwirkung ist der Solidität des Gebäudes eben so nachtheilig als diejenige, welche die Enden der Bögen gegen ihre Stützpunkte ausüben. Man wird sich leicht über das Bestehen dieses neuen Schubes Rechenschaft geben können, wenn man von den schon im §. 1. Cap. II. angeführten theoretischen Betrachtungen ausgeht.

Betrachten wir noch ein Mal den Bogen AM (Fig. 3. Taf. II.), der in A horizontal eingemanert ist, und nehmen an, dafs unabhängig von den Kräften $P, p_1, p_2, \ldots p_n$ eine horizontale Kraft Q im Punkte M angreifend wirkt, die zugleich im Stande ist, diesen Punkt in der Verticale MV, wie auch immer die Wirkung der Kräfte $P, p_1, p_2 \ldots p_n$ auf den übrigen Theil des Bogens sein möge, zu erhalten, und untersuchen ferner, welche Umstände bei der Biegung eintreten werden.

Es sind hier zwei Fälle zu beachten: 1) der, wo keine Biegung vorhanden sein wird; 2) der, wo Biegung Statt finden wird.

Ereignete es sich, dafs die Resultante der beiden Kräfte P und Q, Tangente an dem Punkte M des Bogens wäre, ferner überdies die Form der Krümmung des Bogens und die Vertheilung der Gewichte $p_1, p_2, \ldots p_n$ derartig wären, dafs in irgend einem Punkte m die Resultante aller am Bogen von M bis m angebrachten Kräfte Tangente an letzterem Punkte wäre, so würde der Bogen nur Kräften unterworfen sein, die Zusammendrückung nach der Längenrichtung der Fasern zu bewirken strebten, eine Biegung würde jedoch nicht Statt finden.

Wenn aber ein solches Zusammentreffen der Umstände nicht Statt findet, wie es bei den Kreisbögen der Fall ist, so wird eine Biegung sich zeigen, die indefs weniger beträchtlich ist, als wenn die Kraft Q nicht existirte. Der Punkt M, anstatt nach M' hinzurücken, würde z. B. nach M'' in die Verticale MV zu liegen kommen, und weil der Punkt A fest ist und die Tangente an diesem Punkt der Curve nothwendig horizontal sein mufs, so folgt, dafs der Bogen eine Figur, ähnlich wie $M''m''A$, annehmen wird (Fig. 3. Taf. II.).

Um von diesem hypothetischen Bogen auf den wirklichen zu kommen,

braucht man nur die Figur $M''m''A$ herunterzurücken bis M'' nach M gekommen ist; vergleicht man dann die anfängliche Figur MmA mit der durch die Biegung entstandenen $M''m''A$, so sieht man, dafs ein gewisser Theil des Bogens, vom Scheitel aus gerechnet, sich unter seine anfängliche Stellung senkt, während ein anderer Theil vom Fufse an gerechnet, sich mehr oder weniger erhebt, so dafs die zwischen M und m gelegenen Punkte zu gleicher Zeit eine Verschiebung in verticaler und eine andere in horizontaler Richtung erfahren und der Bogen die Form MmA' (Fig. 4. Taf. II.) annehmen mufs.

Hierdurch erzeugen sich in den aus einem Halbkreisbogen und einem geraden Gespärre, wie in Fig. 5. Taf. II. dargestellt ist, zusammengesetzten Gespärren, Wirkungen, deren Streben dahin geht, den Pfosten gegen den Theil der Mauer zwischen dem Fufs des Bogens und der Stelle, wo der Pfosten mit dem Sparren verbunden ist, umzukanten, und wenn die Verbindungen des Gespärres von nicht genügender Festigkeit sind oder der Pfosten anfängt sich zu biegen, so stützt sich das Ende der Zange gegen die Mauer und übt gegen diese einen Druck aus, der um so gefährlicher ist, je weiter der Angriffspunkt desselben von der äufseren Kante der Mauer entfernt ist, um welche die Drehung vor sich gehen kann. Das Vorhandensein dieses Druckes ist den meisten Constructeuren bekannt, und selbst von denen, welche die Existenz des Horizontalschubes in der Ebene des Auflagers in Abrede stellten, zugegeben worden. Doch es entsteht noch eine andere Wirkung, deren Einflufs, obgleich er sehr bestimmt Statt findet, bei Weitem weniger genau abgeschätzt ist; dieser Einflufs, der bei jedem Dachgerüste, durch welches System von Gespärren es auch getragen werde, Statt finden kann, ist jedoch viel merklicher und erfordert am meisten Aufmerksamkeit bei Dächern, die durch Bögen getragen werden, wegen der Biegsamkeit dieser letzteren und der Leichtigkeit, mit welcher sie ihre Form verändern.

Es ist bekannt, dafs, wenn die Bedeckung eines Gebäudes hergestellt wird, man zuerst die Gespärre an ihre Stelle bringt, dann die Schwelle, welche auf der Mauer ruht, darauf die Pfetten und endlich die Leersparren, deren Untertheile mit der Schwelle verbunden werden. Nachdem alle diese Verbindungen hergestellt sind, fängt man an das Dachgerüst mit dem Gewichte der Bedachung zu belasten. Nun ist aber dies Gewicht zuweilen sehr beträchtlich, und wenn es genügend ist, die Gespärre zu biegen und ihren Scheitel zu senken, so ist klar, dafs die Leersparren, nun nicht mehr in ihrer anfänglichen Lage durch die Forstpfette und die dem Forste benachbarten Pfetten unterstützt, gleichfalls sich herunter zu senken streben. Sie werden dann in Folge ihres Eigengewichts in schräger Richtung einen Druck auf die Schwelle ausüben, aus welchem am oberen Theil der Mauer ein neuer Horizontalschub resultiren wird, der bis zur Hälfte des Gewichts der Bedachung multiplicirt mit der Tangente des Winkels, den die Leersparren mit der Verticale machen, steigen kann. Besitzen die Mauern nun nicht genug Stabilität, um diesem Schube widerstehen zu können, so werden sie so weit nach aufsen umkanten, bis die Schwelle vermöge dieser Bewegung sich um ein hinreichendes Mafs gesenkt hat, dafs die Leersparren

wieder auf den Pfetten ruhen und die Bedeckung wieder gänzlich von den Bindergespärren des Dachgerüsts getragen wird. (Siehe in Bezug auf diese Thatsachen den folgenden §. 2 und den §. 1 des Cap. IX.)

§. 2. Ueber die Aufsuchung des Elasticitäts- und Zerreifsungs- oder Bruch-Coefficienten der halbkreisförmigen Bögen.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dafs es nicht genügt, den Bögen der Bogengespärre Querschnitte zu geben, die dem Bruche widerstehn, sondern dafs sie auch so angeordnet werden müssen, dafs ihre Biegsamkeit eine gewisse Grenze nicht überschreite und nicht unangenehme und schlimme Folgen herbeiführe. Es ist also sehr wesentlich, im *Voraus* abschätzen zu können, welche Formänderung die Wirkung der Belastung bei irgend einem Bogen hervorbringen wird.

Am Schlusse dieses Paragraphen wird man Formeln finden, mittelst welcher man den Pfeil der Krümmung oder die Senkung des Scheitels der kreisförmigen Bögen berechnen kann, welche durch die Einwirkung eines auf irgend eine Weise auf dem Umfange des Bogens verbreiteten Gewichts erzeugt ist. Diese Formeln sind dem Werke Naviers über die Anwendung der Mechanik auf die Stabilität der Constructionen, Art. VIII. Nr. 425 und folgende, der zweiten Auflage, entlehnt, oder sie sind vielmehr Anwendungen der von diesem berühmten Ingenieur gegebenen Theorie. Da diese Rechnungen etwas ausgedehnt sind, glaubte ich sie an den Schlufs dieser Abhandlung stellen zu müssen. (Siehe Anhang Nr. 45 und 4?.) Um aber den Zweck der Untersuchungen, von denen hier die Rede ist, kennen zu lernen, wird es vielleicht nicht überflüssig sein, eine Definition von dem *Modulus* oder *Coefficienten* des Widerstands gegen Biegung und Bruch, welche der Gegenstand unsrer Untersuchungen über Holzbögen waren, zu geben.

Mit dem Namen *Elasticität* bezeichnet man die Eigenschaft der Körper, einen gröfseren oder geringeren Widerstand äufseren Kräften entgegenzusetzen, die sie zu verlängern oder zu verkürzen streben. Man sagt, dafs die Elasticität vollkommen ist, wenn der Körper, sobald er sich selbst überlassen ist, seine ursprünglichen Dimensionen wieder annimmt. Die Elasticität ist im Gegentheil beeinträchtigt, wenn die Formveränderungen, welche die Körper erlitten, nicht zugleich mit der Kraft, die sie verursachte, gänzlich verschwinden. In der That ist klar, dafs, wenn dies nicht der Fall ist, der Körper nicht mehr eines so grofsen Widerstandes, als der war, welchen er vorher entwickelte, fähig ist.

Man erklärt sich die Erscheinung der Elasticität und die des Verlorengehens derselben, indem man sich die festen Körper wie aus Moleculen zusammengesetzt denkt, die durch zwei Kräfte von einander entfernt gehalten werden, von denen eine attractiv, die andere repulsiv, und die im normalen Zustande der Körper sich gegenseitig das Gleichgewicht halten; über die Natur dieser Kräfte macht man die Annahme, dafs jedes Mal, wenn durch Einwirkung einer äufseren Kraft man ein Nähern der Molecule bewirkt, die Repulsions-Kraft schnell wächst, bis

nach einer gewissen Zeit, wo sie grofs genug geworden ist, um der äufseren Kraft das Gleichgewicht zu halten, die Molecule aufhören sich einander zu nähern, und das ganze System im Gleichgewichtszustande verharrt. Man setzt auf dieselbe Weise voraus, dafs, wenn eine äufsere Kraft die Molecule zu trennen strebt, die Attractions-Kraft sich zu äufsern anfängt, und die Vorgänge dabei derselben Art sind, wie die so eben in Bezug auf die Repulsions-Kraft erwähnten. Man wird ebenfalls zugeben müssen, dafs, wenn die Entfernung oder die Annäherung der Molecule gewaltsam über eine gewisse Grenze hinaus erfolgt, oder zu oft wiederholt wird, oder sie endlich während einer sehr langen Zeit dieselbe bleibt, die attractive und repulsive Kraft nicht mehr in derselben Weise wirken werden; das Verhältnifs ihrer Intensität ändert sich und der Körper wird in einem neuen Gleichgewichtszustande beharren. (Siehe hierüber Introduction à la Mécanique Industrielle de Poncelet, deuxième édition, pag. 250.)

Um im Voraus bestimmen zu können, welcher Kraft die Elasticität eines festen Körpers das Gleichgewicht halten wird, mufs man ein genaues Maafs dieser Elasticität besitzen; aus dem Folgenden wird sich ergeben, welcher Art die Versuche sind, aus denen es erhalten werden kann.

Nehmen wir mehre gerade prismatische Körper aus dem Material des gegebenen Körpers hergestellt, und setzen voraus, dafs diese Prismen, vertical hängend, an einem Ende einen festen Aufhängepunkt besitzen, und jedes an seinem anderen Ende mit Gewichten beschwert sei, die man allmählich immer mehr vergröfsert; bemerkt man sich nun sorgfältig die nach einander durch Einwirkung der Belastung eintretenden Verlängerungen, so wird man Folgendes beobachten:

1) Sobald die Verlängerungen sehr klein sind, scheinen sie für *ein und dasselbe Prisma* den sie erzeugenden Gewichten merklich proportional zu sein, das heifst: wenn ein Kilogramme das Prisma um einen Millimeter verlängert, werden zwei Kilogramme es um zwei Millimeter verlängern, und so ferner. Wenn aber die Verlängerungen sehr beträchtlich würden, so würden sie eine nachtheilige Aenderung in der Elasticität des Prismas erzeugen und im gröfseren Maafsstabe wachsen, als die Gewichte, von denen sie herrühren. Da man aber bei Constructionen sich wohl in Acht nimmt, die Materialien Einwirkungen ertragen zu lassen, welche im Stande wären, ihre Elasticität zu benachtheiligen, so kann man das Gesetz, dafs die Verlängerungen den ausdehnenden Kräften proportional sind, für die Fälle der Praxis immer als genau betrachten.

2) Für *zwei Prismen* von gleichem Querschnitt und Material, aber verschiedener Länge, verhalten sich die von demselben Gewichte bei jedem erzeugten absoluten Verlängerungen wie die anfänglichen Längen der Prismen selbst. Wirkt z. B. ein Kilogramm am äufsern Ende beider Prismen, von denen das eine einen Meter, das andere zwei Meter lang ist, beide aber von gleicher Dicke und gleichem Material sind, und das erste wird dadurch um einen Millimeter verlängert, so wird das andere dadurch um zwei Millimeter länger werden. Hieraus folgt, dafs für diese beiden Prismen, bei demselben Gewicht, die Verlängerung auf den Meter dieselbe sein wird.

3) Für *zwei Prismen* von gleicher Länge und Material, aber verschiedenen Stärken, sind die durch dasselbe Gewicht erzeugten Verlängerungen von der Querschnittsfläche abhängig, und zwar so, dafs, wenn ein Prisma von quadratischem Querschnitt von einem Centimeter Seite und einem Meter Länge sich durch ein Kilogramm Belastung um einen Millimeter verlängert, ein Prisma von derselben Länge und quadratischen Querschnitt von zwei Centimeter Seite sich nur um den vierten Theil eines Millimeters verlängern wird.

4) Für *zwei Prismen* von derselben Länge und Stärke, aber verschiedenem Material, wird für gleiche Belastung die Verlängerung eines jeden nicht dieselbe sein. So wird z. B. ein Prisma von Eisen, alles Uebrige gleich gesetzt, sich zwanzig Mal weniger als ein Prisma von Weifstanne aus den Vogesen verlängern.

Demgemäfs wird die absolute Verlängerung l, welche ein Prisma von der Länge L, der Querschnittsfläche Ω, und mit einem Gewichte P belastet, erfahren wird, gleich sein dem Verhältnisse $\frac{PL}{\Omega}$, multiplicirt mit einem gewissen Coefficienten $\frac{1}{E}$, der durch die Natur des Materials, aus dem das Prisma gefertigt ist, bedingt wird. Man erhält also:

$$l = \frac{PL}{E\Omega}, \text{ woraus ferner folgt: } E = \frac{PL}{\Omega l}.$$

Nach dem, was vorher gegangen ist, ist leicht einzusehn, dafs der Ausdruck $\frac{PL}{\Omega l}$ denselben numerischen Werth behalten wird, so lange man Prismen von gleichem Material betrachtet.

Diese Gröfse E, die für dasselbe Material constant ist, eignet sich also als Maafs für die Elasticität dieses Materials. Man nennt sie *Elasticitäts-Modul* oder *Elasticitäts-Coefficient*, und um ihren Zahlenausdruck zu vereinfachen, setzt man $\Omega = 1$, $\frac{L}{l} = 1$, woher man hat $E = P$, also E in diesem Falle das Gewicht bezeichnet, welches bei einem Prisma von der Länge L die absolute Verlängerung $l = L$ erzeugt, wenn zugleich der Querschnitt des Prismas gleich der Flächeneinheit war.

Kennt man den Werth E für ein bestimmtes Material, so kann man unmittelbar durch die Relation

$$\frac{l}{L} = \frac{P}{\Omega E}$$

die Verlängerung auf den Meter, $\frac{l}{L}$, welche ein Prisma, dessen anfängliche Länge L und dessen Querschnitt Ω war, durch die Einwirkung eines Gewichts P erfährt, berechnen, und demnach, wenn man die Gröfse λ der Verlängerung auf den Meter, über welche hinaus auf die Elasticität nachtheilig eingewirkt wird, kennt, einsehen, dafs das Gewicht $P' = E\Omega\lambda$ das gröfste ist, womit das fragliche Prisma, ohne dafs man zu fürchten braucht, dafs seine Widerstandsfähigkeit

geschwächt werde, belasten kann. Die vorhergehenden Bemerkungen gelten auch von den Verkürzungen, die die Körper, durch Drücke parallel mit der Längenrichtung der Fasern gerichtet, erfahren, indem man annimmt, dafs, wenn anstatt das Gewicht P an einem Prisma aufzuhängen, es durch das oberste Ende des vertical hingestellten Prismas getragen wird, die durch dies Gewicht bewirkten Verkürzungen den Verlängerungen, die aus seiner Wirkung im entgegengesetzten Sinne entstehen würden, gleich sind, dabei indessen vorausgesetzt, dafs die Gröfse des Gewichts und die Dimensionen des Prismas in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dafs das letztere keine seitliche Biegung annehmen werde.

Indem man diese Voraussetzung macht, kann man Alles, was über das Gesetz, nach welchem die Verlängerungen erfolgen, gesagt ist, auf die Verkürzungen anwenden, und demgemäfs wird durch den *Elasticitäts-Modul* eben so gut der specifische Widerstand (résistance spécifique) eines Körpers gegen Zusammendrückung wie sein specifischer Widerstand gegen Ausdehnung gemessen; man kann ihn als Maafs dieser neuen Wirkungen anwenden, wenn man den Ausdruck verlängern durch verkürzen ersetzt.

Die Hypothese, dafs $l = L$ sei, oder, wenn man will, die Betrachtung eines Gewichts, welches im Stande sei, einen prismatischen Körper um seine eigne Länge auszudehnen oder zu verkürzen, ist rein ideal zu nehmen. Es würde selbst absurd sein, anzunehmen, dafs man durch Zusammendrückung die anfängliche Länge eines festen prismatischen Körpers auf Null reduciren könne. Aber eine in solcher Weise aufgefafste Definition hat den Vorzug, die Ideen an leicht zu behaltende und leicht in die Rechnung einzuführende Zahlen zu knüpfen, und defshalb hat man sie angenommen.

Der Widerstand eines Körpers gegen Zerreifsen durch Ausdehnung (absolute Festigkeit) wird *durch das Gewicht gemessen, welches im Stande ist, in einer kurzen Zeit ein Prisma, dessen Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, zu zerreifsen.* Man nennt dieses den *Zerreifsungs-Coefficienten* oder den *Modulus des Widerstandes* dieses Körpers *gegen Zerreifsen* (coefficient ou module de résistance à la rupture). Bezeichnet man diesen Modulus mit R und betrachtet ein anderes Prisma, dessen Querschnitt die Fläche Ω hat, so erhält man für den Werth des Gewichts P', welches im Stande ist, dies Prisma zu zerreifsen

$$P' = R\Omega.$$

Diese Definition gilt gleichfalls für den Modulus des Widerstandes des Körpers gegen Bruch durch Zusammendrückung, mit der Modification, dafs die Länge des Prismas hier in Betracht zu ziehen ist, und zwar so, dafs, nennt man a die kleinste Seite des Querschnitts, L seine Länge, Ω die Fläche seines Querschnitts, R das Gewicht, welches einen Würfel, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, zerdrücken kann, k einen gewissen Coefficienten, der sich mit dem Quotienten $\frac{a}{L}$ ändert und gleich der Einheit ist, wenn $\frac{a}{L} = 1$ wird, so erhält man als

Ausdruck für das Gewicht, welches im Stande ist, dies Prisma zu zerdrücken

$$P = \frac{R\Omega a}{kL}.$$ (Siehe Anhang Nr. 19 Tabelle II.)

Man nennt *Grenze der dauernden Kraft, der bleibenden Belastung* (limite des efforts permanents, ou des charges permanentes), die gröfste Kraft des Zuges oder der Zusammendrückung, der man die Fasern des Körpers auf der Flächeneinheit unterwerfen kann, ohne ihrer Elasticität zu schaden. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit R', so wird man zur Berechnung des Querschnitts eines Körpers, der mit einem Gewichte P oder einem Gewichte, mit dem man ohne Gefahr ein Prisma vom Querschnitte Ω belasten kann, belastet ist, die Gleichung haben

$$\frac{P}{\Omega} = R'.$$

Gewöhnlich nimmt man R' gleich einem Zehntel, einem Siebtel oder allerhöchstens einem Fünftel des Werths des Zerreifsungs-Coefficienten in Kilogrammen, je nachdem das anzuwendende Material mehr oder weniger durch die Einwirkung der Zeit und Witterung leidet, oder man den Mangel an Gleichartigkeit der Structur dadurch verdecken will. Für Tannenholz erhält man z. B. durch den Versuch $E = 1\,000\,000\,000^k$, $R = 5\,000\,000^k$, und man nimmt $R' = 500\,000^k$ bis $800\,000^k$; für Schmiedeisen $E = 20\,000\,000\,000^k$, $R = 60\,000\,000^k$ und man nimmt $R' = 6\,000\,000^k$ bis $12\,000\,000^k$. (Siehe die Tabelle in Nr. 18 des Anhangs.)

Die Kenntnifs der Werthe E, R und R' würde von keinem grofsen Nutzen sein, wenn sie nur dazu dienten, die Verlängerungen und Verkürzungen gerader Prismen, die nach der Längenrichtung der Fasern gezogen oder gedrückt werden, zu berechnen. Aber sie dienen auch dazu, für die Biegung gerader oder gekrümmter prismatischer Körper die Grenzen zu finden, innerhalb welcher diese Biegung bleiben mufs, wenn die Elasticität des Körpers nicht beeinträchtigt werden oder der Körper nicht dem Bruche ausgesetzt sein soll. Man wird dies mittelst einiger Bemerkungen über den Widerstand der prismatischen Körper gegen Biegung begreifen, welche letzteren fast die Einzigen sind, die man im Grofsen bei Constructionen anwendet. Betrachten wir also einen prismatischen Körper, dessen *mittlere Axe*, d. h. der geometrische Ort der Schwerpunkte der verschiedenen Querschnitte, eine gerade Linie oder eine ebene Curve ist, und nehmen an, dafs alle auf den Körper wirkende Kräfte in der Ebene der mittleren Axe liegen und normal auf dieser Axe sind, damit wir nur die Biegung nach einer Richtung hin zu betrachten brauchen.

Wenn der Körper sich biegt, wird eine Veränderung in seiner Krümmung eingetreten sein. Betrachten wir also einen Theil des Körpers, wo die Krümmung gröfser geworden ist, so werden die an der concaven Seite des Körpers liegenden Fasern verkürzt, und die Fasern an der convexen Seite verlängert sein; irgend wo zwischen der einen und anderen werden sich nothwendig Fasern befinden, deren Länge sich nicht geändert hat, d. h. ihre Molecule werden

sich auf Linien von gröfserer Krümmung als vor der Biegung befinden, aber ihre gegenseitigen Entfernungen sich nicht geändert haben.

Wenn unabhängig von den zur mittleren Axe normalen Kräften mit dieser Axe parallele Kräfte vorhanden wären, so würden die gleichzeitig auf den Körper ausgeübten Wirkungen in einer Verlängerung oder Verkürzung der Fasern durch die tangentialen Kräfte und in einer Biegung bestehen, die durch die Wirkung der normalen Kräfte erzeugt würde.

Aus dem, was so eben über Biegung gesagt ist, sieht man, dafs alle ihre Wirkungen auf die Fasern des Körpers auf Verlängerungen oder Verkürzungen der Fasern zurückkommen. Nun ist aber nach dem Vorhergehenden der Widerstand eines Körpers gegen äufsere Einwirkungen dem Elasticitätsmodul seines Materials und der Veränderung der Länge seiner Fasern proportional; könnte man also diese letztere messen, so würde man einen Ausdruck für den Widerstand des Körpers gegen Biegung erhalten. Um ein Maafs für die Veränderungen zu erhalten, die in der Länge der Fasern eines sich biegenden Körpers hervorgerufen werden, mufs man, was diese Biegung angeht, zwei Hypothesen zugeben, welche glücklicherweise sich wenig von der Wirklichkeit zu entfernen scheinen, da die Theorie, denen sie als Basen dienen, auf Resultate führte, die gänzlich in Uebereinstimmung mit den Thatsachen stehen.

Die erste Hypothese bezieht sich auf die Lage der unveränderlichen Fasern. Man nimmt an, dafs diese Fasern eine Cylinderfläche bilden, welche normal auf der Ebene der mittleren Axe steht und diese Axe selbst enthält, so dafs, wenn die Ebene der mittleren Axe vertical ist und man einen Schnitt durch den Körper normal auf diese Axe legt, die Durchschnittslinie dieser Schnittfläche mit der vorgedachten Cylinderfläche eine horizontale Linie ist, welche durch den Schwerpunkt geht, und die man mit dem Namen Axe der unveränderlichen Fasern (neutrale Axe) bezeichnet. Zweitens mufs man zugeben, dafs die Verlängerungen und Verkürzungen, welche die Fasern des Körpers erleiden, proportional dem Contingenzwinkel oder umgekehrt proportional der Gröfse des Krümmungshalbmessers der mittleren Axe nach der Biegung sind, und im geraden Verhältnisse mit der Entfernung der Fasern von der Axe der unveränderlichen Fasern stehen.

Mittelst dieser Voraussetzungen gelangt man leicht dazu, die Gröfse der Veränderungen zu finden, welche die Fasern des Körpers erleiden, und Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Molecularkräften, die durch diese Aenderungen im Innern des Körpers entwickelt werden, und den äufseren Kräften aufzustellen, welche die Biegung erzeugt haben. Hieraus leitet man dann einfach die Gröfse der Verschiebungen her, welche die verschiedenen Theilchen des Körpers während der Biegung erfahren haben.

Auf diesem Wege findet man, wenn A den Halbmesser oder die halbe Sehne eines Kreisbogens, a und b die Breite und Höhe seines Querschnitts, E den Elasticitäts-Coefficienten, f den von dem äufsersten Ende des Bogens in der

Richtung der auf ihn einwirkenden Kraft gemachten Weg und K einen Coefficienten bezeichnet, der aus den Rechnungsschritten hervorgeht:

$$f = \frac{KPA^3}{Eab^3},$$

einen Ausdruck, aus welchem man den Werth von E erhält, wenn man für $\frac{P}{f}$ durch Erfahrung gefundene Werthe substituirt, und welcher auch umgekehrt den Pfeil der Krümmung eines Bogens von gegebenen Dimensionen finden läfst, wenn man für E den Werth setzt, welcher dem Materiale des Bogens entsprechend ist.

Für homogene Körper, aus denen sich Prismen bilden lassen, kann man die Werthe E, R und R' mittelst directer Untersuchungen finden, wovon wir oben eine Idee zu geben versucht haben; aber für aus mehren Stücken gebildete prismatische Körper, denen Homogenität mangelt und deren Widerstand gleichzeitig abhängig ist von der natürlichen Elasticität der Materialien, aus denen sie zusammengesetzt sind, von der Form, die den verschiedenen Theilen gegeben ist, und endlich von der Güte der Verbindungsmittel müssen diese Werthe für die Form selbst, in welcher diese Körper angewendet werden, durch directe Versuche gefunden werden. So ist z. B. sehr klar, dafs ein System von kurzen Bohlen, die einen Bogen nach Philibert de l'Orme bilden, nur in der Form eben dieses Bogens selbst zu den Versuchen dienlich sein kann. Es ist also nöthig, dafs wir für Kreisbögen den genauen Werth der Ausdrücke von der allgemeinen Form $f = \frac{KPA^3}{Eab^3}$ kennen lernen.

Wir geben sie hier in folgenden zwei Tabellen, und verweisen hinsichtlich ihrer Herleitung etc. auf die Nr. 45, 47 und 48 des Anhanges.

Tabelle der Senkungen des Scheitels der kreisförmigen Bögen durch die Einwirkung verschiedenartig vertheilter Gewichte.

Form des Bogens.	Art der Belastung.	Senkung des Scheitels bei Bögen deren Querschnitt		Bemerkungen.
		rechteckig.	kreisförmig.	
Halbkreis.	Gleichförmig auf dem Umfange des Bogens verbreitet.	$f = 0{,}05 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{E}$.	$f = 0{,}005 \frac{A^3}{r^4} \cdot \frac{P}{E}$.	P ganzes Gewicht, welches der Bogen trägt. A Halbmesser des Bogens. E Elasticitätscoefficient. a Breite, b Höhe des rectangulären Querschnitts des Bogens. r Halbmesser des kreisförmigen Querschnitts des Bogens. f Senkung des Scheitels durch die Einwirkung des Gewichts. (Siehe Nr. 44, 45, 47 und 48 des Anhangs.)
Id.	Gleichförmig in Bezug auf eine Horizontale.	$f = 0{,}083 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{E}$.	$f = 0{,}009 \frac{A^3}{r^4} \cdot \frac{P}{E}$.	
Id.	Ganz im Scheitel aufgehangen.	$f = 0{,}222 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{E}$.	$f = 0{,}0239 \frac{A^3}{r^4} \cdot \frac{P}{E}$.	
Id.	In einem Punkte, vertical über einem Viertel des Durchmessers des Bogens aufgehangen.	$f = 0{,}348 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{E}$.	$f = 0{,}0365 \frac{A^3}{r^4} \cdot \frac{P}{E}$.	
Gedrückter Kreisbogen.	Gleichförmig in Bezug auf eine Horizontale.	$f = 3{,}60 \frac{PY^2X}{Eab^3}$. (1)	$f = \frac{0{,}38PY^2X}{Er^4}$. (2)	X halbe Sehne des Bogens. Y Pfeil oder Steigung. P, E, a, b und r dieselben Bezeichnungen wie hier oben. (Siehe Nr. 44, 45, 47 u. 48 des Anhangs.)
Id.	Ganz im Scheitel aufgehangen.	$f = 0{,}0469 \frac{PX^3}{Eab^3}$.	$f = 0{,}005 \frac{PX^3}{Er^4}$.	

Bemerkung. Die Formeln (1) und (2) sind nur so lange anwendbar als X wenigstens noch gleich $10 \cdot Y$ ist.

§. 3. Horizontale Verschiebung der Curve des Bogens an den Bruchstellen.

Wenngleich es von Wichtigkeit ist, die Senkung des Scheitels eines Bogens bei gegebener Belastung zu kennen, so ist es nicht weniger interessant, die Verschiebungen in horizontaler Richtung für den Punkt zu kennen, bei welchem diese Verschiebung ein Maximum ist. Man kann indessen eine einfache Formel, die für alle Fälle pafst, nicht geben, weil dieser Punkt seine Lage ändert und sich den Enden des Bogens um so mehr nähert, je stärker die Biegung ist.

Da es sich indessen um praktische, nicht um theoretische Werthe handelt, können wir immerhin annehmen, dafs dieser Punkt ungefähr im Drittel des

Abstandes zwischen Fufs und Scheitel des Bogens, auf dem Umfange desselben gemessen liegt, so dafs der Halbmesser, der diesen Punkt mit dem Mittelpunkte verbindet, einen Winkel von 30° mit dem Horizont einschlösse, eine Hypothese, welche mit den Erscheinungen bei wenig beträchtlichen Biegungen übereinstimmt; der auf diese Weise gewählte Punkt entspricht überdies demjenigen, der den äufsersten Enden der verticalen Pfosten bei den Bogengespärren gegenüberliegt, wefshalb folglich die Kenntnifs seiner Bewegungen von Wichtigkeit ist.

Nennt man D diese Horizontal-Verschiebung und f die Senkung des Scheitels durch die Einwirkung derselben Belastung, so findet man für die Halbkreisbögen, wenn sie mit einem im Scheitel aufgehängten Gewichte belastet sind

$$D = 0{,}59\ f,$$

und für eine Vertheilung des Gewichts, bei welcher auf gleiche Theile der Horizontal-Projection gleiche Gewichte kommen

$$D = 0{,}63\ f.$$

In der Praxis kann man immer, wenn die Biegung sehr geringe ist, $D = 0{,}50 f$ setzen. (Siehe Nr. 46, 47 und 48 des Anhangs.)

§. 4. Von der Biegung der geraden Gespärre.

Die Betrachtungen, mittelst welcher man im Voraus die Art der Biegung von Bögen bestimmen kann, lassen sich im Allgemeinen auf alle Arten von Gespärren und besonders auf das einfache gerade Gespärre Nr. 8 auf Taf. XIV. Fig. 1 anwenden.

Unter der Voraussetzung, dafs dies Gespärre im Scheitel eingemauert und anfänglich nur der Einwirkung der Kraft P und der Kräfte p_1, p_2, ... p_n ausgesetzt sei, sieht man, dafs die Biegung des Sparrens und der Stuhlsäule anfangs so vor sich gehen wird, dafs die Concavität dieser beiden Stücke nach aufsen gekehrt ist und das Gespärre eine ähnliche Figur, wie die Fig. 6 Taf. II. durch $AN'M'$ dargestellte, annehmen wird. Bringt man aber in M eine Kraft Q an, die im Stande ist, diesen Punkt in der Verticale zu halten, so wird die Biegung des Stückes NM im entgegengesetzten Sinne erfolgen und die Verbindung der beiden Stücke AN und NM wird die Form $AN''M'$ annehmen.

Rückt man jetzt die Figur $AN''M''$ vertical so weit herunter, bis der Punkt M mit M'' zusammenfällt, so erhält man die Figur $A'N''M$, Fig. 7 Taf. II., welche bei einer Vergleichung mit ANM zeigt, dafs durch die Einwirkung der Kräfte p_1, p_2, ... p_n, P und Q eine Senkung des Scheitels und Horizontalverschiebung des Punktes N erfolgt; Wirkungen, die den bei den Bogengespärren Statt findenden entsprechen. Eben so augenscheinlich wird ein Schub gegen die Widerlager in der durch M gedachten Horizontalebene hervorgerufen werden. Dieser Schub ist, eben so wie bei den Bögen, unabhängig von dem zur Construction des Gespärres verwandten Material, er hängt nur von der Belastung und dem zwischen der Höhe und Spannweite des Gespärres bestehenden Verhältnisse, d. h. von der Höhe AO und der Weite OM, ab.

Die Senkung des Scheitels A ist von denselben Gröfsen abhängig und überdies von der Elasticität des Materials, aus welchem das Gespärre zusammengesetzt ist, und dem Querschnitt der Theile dieses Gespärres.

Die Kenntnifs der Senkungen des Scheitels der geraden Gespärre bei gegebenen Belastungen ist wünschenswerth, um die Dimensionen der Bögen so berechnen zu können, dafs die Krümmungspfeile der Bögen und die der geraden Gespärre nahe einander gleich seien. Ferner ist nöthig, im Voraus bestimmen zu können, um wie viel der Punkt, wo der Pfosten mit dem Sparren verbunden ist, sich in horizontaler Richtung verschieben wird, um zu verhindern, dafs er einen Schub gegen die Mauer ausübe.

Die genaue Bestimmung dieser Gröfsen würde nur durch sehr lange und unbequeme Formeln zu erreichen sein. Indessen, da dieselben selbst im Augenblicke des Bruchs immer sehr klein sein werden, wie es aus den Versuchen über diesen Gegenstand hervorgehen wird, so folgt, dafs für die eben besprochenen fraglichen Gegenstände eine Annäherung genügend sei, denn irrte man sich selbst um Etwas in der Senkung des Scheitels und der horizontalen Verschiebung des Sparrenendes, so würden wesentliche Unannehmlichkeiten daraus nicht entstehen, da die Verschiebungen dieser Punkte immer nur wenige Centimeter betragen.

Es versteht sich übrigens, dafs nicht dasselbe Statt finden würde, wenn man diese Verschiebungen hinsichtlich der Gröfse betrachten wollte, die sie annehmen können, ehe der Bruch erfolgte. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, müfste man sie mit der gröfsten Genauigkeit durch Formeln berechnen, welche die Umstände berücksichtigen, worin jeder der Theile des Gespärres je nach der Art der Verbindung sich befindet, welche ihn mit den übrigen Theilen vereinigt.

Um annäherungsweise die Aenderungen der Form des Gespärres ANM (Fig. 8 Taf II.) zu berechnen, betrachte ich den Theil AN 1) als in A eingemauert und in N mit dem Theile NM so verbunden, dafs die Winkel OAN und ANM unveränderlich bleiben; 2) mit Gewichten $p_1, p_2, \ldots. p_n$, die gleichförmig über die Länge AN verbreitet sind, belastet, und endlich zweien Kräften P und Q, die in M angreifen, unterworfen; P sei dabei gleich $p_1 + p_2 + p_3 \ldots. + p_n$ und Q grofs genug, um den Punkt M beständig während der Biegung vertical über seiner anfänglichen Lage zu halten.

Ich gebe indessen zu, dafs es nicht ganz genau ist, den Winkel, den die Linie MN mit der Verticale macht, als constant bleibend zu betrachten, ich vernachlässige vielmehr die Veränderung dieses Winkels während der Biegung.

Nennt man nun:

P das ganze Gewicht, welches das Gespärre trägt,
E den Elasticitäts-Coefficienten,
l die Breite,
h die Höhe des Querschnitts des Bogens,
a und b die Abstände NR und AR (Fig. 8 Taf. II.),
a' und b' die Abstände MS und NS (Fig. 8 Taf. II.),

ω und α die Winkel, welche die Geraden AN und MN mit der Verticale einschliefsen,

f die verticale Senkung des Punctes A, so erhält man mittelst obiger Hypothesen die Formel:

$$f = \frac{P}{4Elh^3}\left(a^2\,(5a + 12a') + 8a'^3 - \frac{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(5a + 12a') + 8a'^3 \operatorname{tang}\alpha}{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(3b' + 2b) + 2a'^2 b' \operatorname{tang}\alpha}\,[a^2\,(3b' + 2b) + 2a'^2 b']\right). \qquad \text{(A)}$$

Für a' gleich Null wird dieser Werth:

$$f = \frac{5Pa^3}{4Elh^3}\left(1 - \frac{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(3b' + 2b)}{a^2 \operatorname{tang}\omega\,(3b' + 2b) + 2b'^3}\right).$$

Die Ableitung dieser Formeln findet man in den Nr. 42, 43 und 44 des Anhangs.

Indessen ist zu bemerken, dafs a' niemals gleich Null sein darf, weil es gut ist, um dem Umkanten des Pfostens nach aufsen hin zuvorzukommen, demselben gleich dann, wenn man ihn auf seine Stelle bringt, eine geringe Neigung nach entgegengesetzter Richtung zu geben, und es wird defshalb die Formel (A) doch immer zur Berechnung des Werthes E angewendet werden können.

Man kann f als Function von ω und α und dem Halbmesser A eines Kreises ausdrücken, der die Stücke AN und NM tangirt, wodurch man erhält:

$$a = A \operatorname{tang}\omega\left(\frac{1}{\sin\omega} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}\right), \qquad b = A\left(\frac{1}{\sin\omega} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}\right),$$

$$a' = A \operatorname{tang}\alpha \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}, \qquad b' = A \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}.$$

Nehmen wir z. B. an, man halte zur Zeit, wo die Pfosten der geraden Gespärre aufgestellt werden, eine Neigung gegen das Innere von einem Zwanzigtheil der Höhe immer für zulässig, so wird man für mit flachen Ziegeln gedeckte Dächer erhalten:

$$\operatorname{tang}\alpha = 0{,}05\,, \qquad \operatorname{tang}\omega = 1{,}00\,, \qquad f = 0{,}0036\,\frac{PA^3}{Elh^3}\,,$$

für mit Schiefer gedeckte Dächer:

$$\operatorname{tang}\alpha = 0{,}05\,, \qquad \operatorname{tang}\omega = 1{,}53\,, \qquad f = 0{,}0102\,\frac{PA^3}{Elh^3}\,,$$

für mit Hohlziegeln gedeckte Dächer:

$$\operatorname{tang}\alpha = 0{,}05\,, \qquad \operatorname{tang}\omega = 2{,}00\,, \qquad f = 0{,}0120\,\frac{PA^3}{Elh^3}\,.$$

Für das gerade Gespärre Nr. 8, welches zu den im folgenden Capitel berichteten Versuchen diente, haben a, a', b, b', folgende Werthe. $a = 3{,}64$, $b = 3{,}66$, $a' = 0{,}36$, $b' = 3{,}66$, und man findet für f

$$f = 7{,}408\,\frac{P}{Elh^3}\,.$$

Oder für den besonderen Fall, um den es sich hier handelt: $l = 0{,}075$, $h = 0{,}12$ und $h^3 = 0{,}001728$,

$$f = 57716\,\frac{P}{E}\,, \qquad E = 57716\,\frac{P}{f}\,.$$

Wenn man f als Function des Halbmessers A der mit dem Gespärre Nr. 8 zu verbindenden Bögen ausdrücken wollte, so erhielte man, da dieser Halbmesser gleich $6^m,06$ und seine dritte Potenz gleich $222^m,45$ ist:

$$f = 0{,}033318 \frac{PA^3}{EIh^3}.$$

§. 5.

Die Belastungen, welche die Gespärre tragen müssen, erzeugen nicht blofs eine Biegung derselben; sie bringen auch Zusammenpressungen in der Längenrichtung der Fasern hervor, deren Wirkung in einer Verminderung der Dimensionen der verschiedenen Theile des Systems besteht. Wenn also der Scheitel eines Dachgespärres sich unter der Einwirkung eines gewissen Gewichts senkt, so rührt dies theils von Biegungen, theils geradezu von Zusammendrückungen her, welche die einzelnen Theile des Gespärres erfahren.

Es würde schwierig genug sein, Versuche über den Widerstand von Holz-Constructionen so zu leiten, dafs man bei den Formänderungen, welche diese erfahren, unterscheiden könnte, wie viel von diesen in Folge der Biegung und wie viel wegen directer Zusammendrückung zu rechnen wäre. Doch ist zu bemerken, dafs Theorie und Versuche einstimmig zeigen, dafs die Formveränderungen die von directen Zusammendrückungen herrühren, immer klein genug sind, verglichen mit den durch die Biegung erzeugten, dafs man sie vernachlässigen oder vielmehr als von der Biegung mit herrührend, betrachten könne.

Man wird z. B. im §. 3 des folgenden Capitels sehen, dafs ein Bogen aus gebogenem Holze von $12^m,12$ Durchmesser, $0^m,075$ zu $0,135$ Querschnitt und mit 296^k im Scheitel belastet, sich um $1^m,22$ gebogen hat. Die Theorie würde finden, dafs von diesen 122 Centimetern Senkung im Scheitel $0^m,0175$ von directer Zusammendrückung herrühren. Da dieser Bruch, der ungefähr $\frac{1}{50}$ beträgt, zwischen den Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler liegt, so hat man die Zusammendrückung nicht in Rechnung gezogen und vorausgesetzt, dafs der ganze Krümmungspfeil durch die Biegung entstanden sei. Hier sollte also nur auf diese beiden Wirkungen der an Gespärren angreifenden äufseren Kräfte aufmerksam gemacht werden; in dem folgenden Capitel wird man den Elasticitäts-Coefficienten der Materialien, aus welchen die den Versuchen unterworfenen Systeme bestehen, berechnen, indem man die beobachteten Formänderungen allein der Biegung zuschreibt.

Späterhin, wenn es sich darum handeln wird, die Querschnitte der einzelnen Theile, aus welchen ein Dachgespärre zusammengesetzt ist, zu berechnen, wird sich die Sache ändern, und man wird in der Rechnung die von der Zusammendrückung herrührenden Wirkungen berücksichtigen, weil diese, wenngleich wenig zu bemerken, doch bedeutend zu einer nachtheiligen Aenderung der Elasticität der Körper und zur Herbeiführung ihres Bruches beitragen.

Siebentes Capitel.

Darlegung der Resultate der über die Biegung der Holzbögen angestellten Versuche.

Geht man auf den §. 2 des Capitels VI zurück, woselbst sich eine Definition des Elasticitäts-Coefficienten findet, so sieht man, dafs die Gröfse dieses Coefficienten genau das Maafs der Festigkeit der verschiedenen bei den Constructionen angewendeten Materialien ist, so dafs, wenn man zum Beispiel zwei Holzarten mit einander vergleicht und der Elasticitäts-Coefficient der ersten den der zweiten um ein Drittel übertrifft, man daraus schliefsen kann, dafs bei gleichen Dimensionen ein Gespärre von irgend einer Form aus der ersten Holzart hergestellt, unbeschadet ein um ein Drittel gröfseres Gewicht als ein Gespärre derselben Form von gleichen Dimensionen aus der zweiten Holzart tragen kann, vorausgesetzt, dafs die Grenze der dauernden Belastung verhältnifsmäfsig dieselbe bleibe. Man hat ebenfalls gesehen, dafs, wenn der Elasticitäts-Coefficient eines gegebenen Materials als Holz oder Eisen bekannt war, man im Voraus die vorzüglichsten Umstände bei der Biegung eines Bogens oder eines Gespärres erkennen konnte, zu deren Construction dieses Material gebraucht worden war.

Meine Versuche hatten einen doppelten Zweck. Zuerst sollten sie dazu dienen, die Solidität eines anfänglich allein bestehenden Bogens und darauf eines Bogengespärres, mit dem eines blofs aus geraden Stücken zusammengesetzten Gespärres zu vergleichen. Zweitens wollte ich wissen, ob die auf verschiedene Weise zusammengesetzten Bögen und Gespärre sich in Bezug auf Biegung und Bruch, wie homogene feste Körper verhielten, dafs heifst, ob die Biegung auf eine regelmäfsige und continuirliche Weise vor sich ginge; denn nur unter dieser Bedingung kann man den durch Versuche über diese verschiedenen Systeme gefundenen Coefficienten einige Wichtigkeit beilegen.

Der bei meinen Versuchen zu befolgende Weg schien mir hiernach, wie folgt, ganz natürlich vorgezeichnet:

1) Ich fing damit an, mittelst directer Versuche, für ein Prisma aus dem Holze, welches ich zur Construction der zum Versuche dienenden Gespärre benutzen wollte, den Elasticitäts-Coefficienten für Tannenholz in der Form eines homogenen Körpers zu bestimmen.

2) In den Versuchen über die Bögen nach Philibert de l'Orme und die Bögen aus gebogenem Holze suchte ich ein Mittel zu erhalten, die Steifigkeit und Solidität dieser Bögen mit denen eines homogenen Holzstückes zu vergleichen, bei welchem gänzliche Ununterbrochenheit und vollständiger Zusammenhang der Fasern Statt findet.

3) Die einfachen aus geraden Hölzern zusammengesetzten Gespärre unterwarf ich ähnlichen Proben, um einen Vergleich zwischen ihnen und den Bögen anstellen zu können.

4) Diese geraden Gespärre wurden mit den Bögen verbunden und dann Versuche der Art mit ihnen angestellt, dafs man den Grad der Verstärkung, den der Bogen dem geraden Gespärre, mit dem man ihn vereinte, verlieh, abschätzen und danach seine gröfsere oder geringere Nützlichkeit feststellen konnte.

5) Endlich construirte ich blofs aus geraden Hölzern hergestellte Gespärre, deren innere Ansicht der eines Bogens sehr nahe kam, und bestimmte durch Versuche das Verhältnifs ihrer Solidität zu der der Bogengespärre.

Da ich hierbei fand, dafs die Biegungen aller dieser Systeme eben so wie jene der homogenen Körper erfolge, so leitete ich aus den über sie gemachten Versuchen Zahlenwerthe ab, die ich als ihre Elasticitäts-Coefficienten betrachtete, und führte diese in die Formeln des Capitels VI. ein, um sie bei der Berechnung der Querschnitte der Stücke, welche bei der Construction der verschiedenen Systeme nöthig werden, benutzen zu können.

§. 1. Vorläufiger Versuch über den specifischen Widerstand des zur Construction der Versuchsgespärre angewendeten Tannenholzes gegen Verlängerung oder Zusammendrückung.

Das zu den Versuchen dienende Prisma, hatte $0^m,07$ Quadratseite im Querschnitt, $2^m,87$ ganze Länge und $2^m,76$ Länge zwischen den beiden Auflagepunkten, welche letztere aus zwei in Schuhe von Holz eingelassenen Stahlschienen bestanden. Die Schuhe ruhten auf steinernen Pfeilern, welche auf einem Roste gegründet waren. (Siehe Taf. XI.)

Die Belastung war in der Mitte des Prismas mittelst eines eisernen Ringes aufgehängt, welcher so abgerundet war, dafs er immer an derselben Stelle auflag. Sie wurde durch einen hölzernen Schemel unterstützt, dessen mittelst einer verticalen Schraube bewegliche obere Deckplatte ihr erlaubte, sanft niederzugehn und ihre Wirkung auf das Prisma ohne irgend eine Erschütterung zu äufsern.

Hinter dem Prisma, und parallel mit seiner Richtung, hatte man eine recht ebene Tafel, in deren Mitte sich ein zwei Decimeter langer Maafsstab befand, vertical aufgestellt, und auf dem Prisma selbst hatte man eine kleine Vorrichtung angebracht, welche aus zwei rechtwinklig auf einander geleimten Winkelmaafsen bestand. Das verticale Winkelmaafs diente als Zeiger, um von der Theilung des Maafsstabes die Pfeile der verschiedenen Krümmungen, welche das Prisma annahm, ablesen zu können. Ein diesem ähnliches Winkelmaafs konnte sich längs des Prismas bewegen und war am Scheitel des Winkels, welchen die beiden Winkelmaafse mit einander einschlossen, mit einer Spitze versehen. Vermöge der Anordnung der beiden Winkelmaafse, zeichnete diese Spitze auf dem Brette sehr genau die Projection der oberen Seite des Prismas, für jeden Grad der Biegung vor. Fig. 1 Taf. XII. stellt die durch dieses Mittel erhaltenen Curven dar.

Von Zeit zu Zeit hob man die Platte in die Höhe, um zu beobachten, ob das Prisma keine bleibende Krümmung beibehielte, selbst nachdem es von der Wirkung des Gewichts befreit war. Auf diese Weise hat man sich versichert, dafs bis zu dem Augenblick, wo es zwei Drittel des Gewichts trug, welches nachher den Bruch hervorbrachte, es seine vollkommene Elasticität behalten habe. In diesem Zeitpunkte des Versuches wurde die Elasticität plötzlich und in merklicher Weise schwächer, und es ist wahrscheinlich, dafs, wenn man das Prisma während einer genügend langen Zeit der Wirkung des Gewichts von 315k ausgesetzt hätte, welches dem Augenblicke, in welchem eine Schwächung der Elasticität sich kund gab, entspricht, dieses Gewicht hingereicht haben dürfte, dasselbe zu zerbrechen.

Die folgende Tabelle enthält die übersichtliche Zusammenstellung der Resultate dieses Versuchs, welchem zufolge ich mich berechtigt glaubte anzunehmen, dafs der Elasticitäts-Coefficient des Tannenholzes, welches ich anwenden mufste, nur 1 000 000 000, und der Coefficient des Widerstandes gegen Bruch 5 000 000 sei. Man kann dies bestätigen, wenn man diese Versuchsresultate in die Formel setzt, welche die Biegung von geraden Hölzern, unter denselben Umständen, wie das zum Versuche dienende, giebt. Diese Formel ist

$$f = \frac{P}{4ab^3} \cdot \frac{X^3}{E} \quad \text{(Nr. 23 u. 24 des Anhangs)},$$

in welcher f die verticale Senkung der Mitte des Stückes unter der Einwirkung des Gewichts P, X die Länge, b die Dicke und a die Breite des Stückes, E den Elasticitäts-Coefficienten bezeichnet. Uebrigens hat man vom Gewicht des Prismas abstrahirt, weil es im Vergleich zu den grofsen Belastungen, welche letzteres tragen mufste, zu vernachlässigen ist.

Der Coefficient des Widerstandes gegen Bruch wird durch die Formel:

$$R = \frac{3}{2}\,\frac{PX}{ab^2} \quad \text{(Nr. 23 des Anhangs)}$$

gegeben, in welcher man für P das Gewicht substituiren mufs, welches den Bruch verursachte.

Gewicht, welches das Prisma trug, in Kilogrammen.	Senkung der Mitte des Prismas, in Millimetern	Senkung der Stützpunkte des Prismas, in Millimetern.	Pfeil der Krümmung, welchen die Belastung hervorbrachte.	Bleibender Pfeil der Krümmung, den das Prisma beibehielt, in Millimetern.	Werth des Elasticitäts-Coefficienten in den verschiedenen Zeitpunkten des Versuchs.	Zeitpunkte, worin die Krümmungen des Prismas auf die Tafel gezeichnet wurden.
5,85	1,25					
10,73	2,50					Curve Nr. 1.
15,35	3,25					
20,42	4,70					
25,10	5,80					
29,90	7,80					
34,70	9,00					
39,50	10,20					

Gewicht, welches das Prisma trug, in Kilogrammen.	Senkung der Mitte des Prismas, in Millimetern.	Senkung der Stützpunkte des Prismas, in Millimetern.	Pfeil der Krümmung, welchen die Belastung hervorbrachte.	Bleibender Pfeil der Krümmung, den das Prisma beibehielt, in Millimetern.	Werth des Elasticitäts-Coefficienten in den verschiedenen Zeitpunkten des Versuchs.	Zeitpunkte, worin die Krümmungen des Prismas auf die Tafel gezeichnet wurden.
44,20	11,20					
49,08	12,20	1,30	10,90		879 017 454	Curve Nr. 2.
53,93	13,50					
58,63	14,40					
63,75	15,70					
68,65	17,00					
73,53	18,20					
78,49	19,50					
84,46	20,20	1,40	18,80	0,30	986 299 972	Curve Nr. 3.
89,39	21,50					
94,19	22,20					
99,19	23,50					
103,96	24,70					
108,73	26,00					
113,85	27,30					
118,60	28,50	2,50	26,00		996 569 378	Curve Nr. 4.
123,45	29,10					
128,25	30,20					
132,95	31,40					
137,85	33,00					
142,95	34,10					
147,95	35,50					
152,65	36,70					
168,50	37,40	3,00	34,40		1 070 203 204	Curve Nr. 5.
178,49	40,40					
187,99	42,00					
197,72	45,60	3,50	42,10		102 606 608	Curve Nr. 6.
204,54	47,80					
227,87	52,00					
247,63	56,80					
267,02	61,50	4,00	57,50		1 015 427 242	Curve Nr. 7.
296,12	68,50					
315,56	75,00					
317,00	86,50	4,50	82,50	7,00	800 576 672	Curve Nr. 8.
336,65	94,00	4,60	89,40	8,40	822 734 970	Curve Nr. 9.
365,61	110,50	4,70	105,80	9,00	758 950 590	Curve Nr. 10.
375,38	114,50					
385,29	120,50					Curve Nr. 4.
394,99	126,00					CurveNr. 11bis
404,74	131,00	5,00	127,00	10,00	696 134 628	
414,24	145,00				Bruch.	Curve Nr. 12.

§. 2.

Tabelle, die Recapitulation der Versuche mit dem Bogen aus gebogenem Holze, Nr. 1, enthaltend.

Art der Vertheilung der Belastung.	Gewicht, welches der Bogen trug.	Senkung des Scheitels oder des Aufhängepunktes der Belastung.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Werth von E aus dem Mittelwerthe der Werthe $\frac{P}{f}$ berechnet.	Bemerkungen.
Das Gewicht ganz im Scheitel aufgehangen.	k 405 429 609	0,235 0,325 0,575	1723 1320 1403	182 800 000	Die hier anzuwendende Formel ist. $E=0{,}222\frac{PA^2}{fab^2}$ oder wenn man nimmt $A=6{,}06$, $A^3=222{,}45$, $a=0{,}15$, $b=0{,}135$, $b^3=0{,}002460375$, $ab^2=0{,}000369$, $E=133\,800\frac{P}{f}$. (Siehe die Tabelle §. 2 Cap. VI.)
Mittelwerth der Werthe $\frac{P}{f}=1367$					
Das Gewicht in einem Punkte, vertical über einem Viertel des Durchmessers, aufgehangen.	k 605	0,60	1000	212 000 000	Die hier anzuwendende Formel ist: $E=0{,}348\frac{PA^3}{fab^3}$ oder $E=211\,691\frac{P}{f}$. (Siehe die Tabelle §. 2 Cap. VI.)
Das Gewicht gleichförmig verbreitet, in Bezug auf eine Horizontale.	k 1064	1,32	806	41 000 000	Die hier anzuwendende Formel ist: $E=0{,}084\frac{PA^3}{fab^3}$ oder $E=51000\frac{P}{f}$. (Siehe die Tabelle §. 2 Cap. VI.)

Der letzte Versuch kann zur Bestimmung des Werthes des Elasticitäts-Coefficienten E nicht dienen, weil die Belastung von 1064ᵏ, welche genügte, um nach Verlauf von ungefähr einer Stunde den Bruch herbeizuführen, nothwendig der Elasticität des Holzes geschadet haben mufste.

Nach den beiden ersten Versuchen scheint es, dafs für einen Bogen aus gebogenem Holze aus 5 Schienen von $0^m{,}027$ Dicke und $0^m{,}15$ Breite, die durch Bänder und Schraubbolzen verbunden waren, der Elasticitäts-Coefficient zu ungefähr 200 000 000ᵏ, das heifst zu einem Fünftel des Elasticitäts-Coefficienten des Tannenholzes, angeschlagen werden kann.

Die Figuren auf Taf. IV., V. und VI. zeigen die verschiedenen Formen, welche der Bogen während der Versuche angenommen hat, und man sieht

daraus, dafs die Erfahrung die Sätze der Theorie in Bezug auf die Art der Biegung bestätigt *).

Der Punkt, welcher in verticaler Richtung am meisten seine Lage ändert, ist der Scheitel oder der Punkt, in welchem die Belastung aufgehängt ist. Derjenige, welcher sich in horizontaler Richtung am meisten verschiebt, ist ein Punkt des Bogens bei 30 oder 32 Graden über dem Horizont. Diese Verschiebung, welche der Hälfte der Senkung des Scheitels gleich kommt, wenn die Biegung gering ist, beträgt kaum ein Drittel derselben im Augenblicke des Bruches.

§. 3. Versuche mit dem Bogen aus gebogenem Holze Nr. 2.

Bei den vorhergehenden Versuchen hatte ich beobachtet, dafs der Bogen nach zwei Richtungen hin auswich, und dafs die Stöfse der Schienen, in den Zwischenräumen zwischen den Bändern, sich etwas öffneten, so dafs dadurch eine merkliche Anschwellung der Theile des Bogens in der Nähe des Scheitels entstand. Ueberdies hatte ein Gleiten der Schienen, eine auf der anderen, derartig Statt gefunden, dafs eine zuerst auf der Krümmung des Bogens normale Linie, nach der Biegung die in Fig. 9 Taf. II. gezeichnete Lage angenommen hatte.

Hiernach war es denkbar, es rühre der schwache Widerstand des Bogens gegen Biegung von diesen beiden Ursachen her, und um mich davon zu überzeugen, suchte ich diese mehr hervorzuheben, indem ich die Breite der Schienen und die Stärke der Eisentheile, welche diese vereinigten, verminderte, und zu dem Ende den Bogen Nr. 2, dessen Schienen nur $0^m,075$ Breite hatten, anfertigen liefs. (Siehe §. 1 des Cap. II. und Tafel VII.)

Dieser Bogen konnte, als er mit neun leeren Kasten, die zusammen ein Gewicht von 288^k ausmachten, belastet war, seine Form nicht behalten, so viele Mühe man sich auch gab, die Entfernungen der Kasten gleich zu machen; er warf sich beständig nach der linken Seite. (Fig. 1 Taf. VII.) Der Punkt, welcher bei der Biegung am meisten seine Lage in verticaler Richtung veränderte, hatte sich um nahe $0^m,80$ gesenkt.

Der Bogen Nr. 2 mit einem im Scheitel aufgehangenen Gewichte, welches allmählich vermehrt wurde, beschwert, hat die nachfolgenden Resultate gegeben.

---

*) Siehe §. 1 Cap. VI., Seite 39 und 40.

Tabelle der mit dem Bogen aus gebogenem Holze, Nr. 2, gemachten Versuche.

Im Scheitel des Bogens aufgehängtes Gewicht.	Senkung des Scheitels.	Werthe von $\frac{P}{f}$.	Werthe von E aus dem Mittelwerthe der Werthe $\frac{P}{f}$ berechnet.	Bemerkungen.
k				
32	0,160	200	Das Mittel aus den Werthen von $\frac{P}{f}$ ist 211, woraus $E = 57\,000\,000$.	Die hier anzuwendende Formel ist. $E = \frac{0{,}222\,PA^3}{fab^3}$ (§. 2 Cap. VI.)
44	0,200	220		$A = 6{,}06$. $A^3 = 222{,}45$.
56	0,270	203		$a = 0{,}075$. $b = 0{,}135$.
68	0,340	200		$b^3 = 0{,}00246$. $ab^3 = 0{,}001845$.
70	0,385	181		$\frac{A^3}{ab^3} = 1\,205\,000$. $E = 270\,000\,\frac{P}{f}$.
82	0,420	195		
104	0,475	220		
116	0,540	213		
128	0,580	220		
224	0,970	230		
296	1,220	242		

Man sieht, dafs bei den Versuchen die Pfeile der Krümmung den Belastungen proportional waren, weil das Verhältnifs $\frac{P}{f}$ fast constant geblieben ist, woraus man schliefsen kann, dafs die Bögen aus gebogenem Holze sich beinahe wie homogene Körper verhalten.

Der Elasticitäts-Coefficient der aus Schienen von $0^m{,}027$ Dicke und $0^m{,}075$ Breite gebildeten Bögen, ist also nach den vorhergehenden Versuchen nur 58 000 000, das heifst, beinahe ein Sechstel von dem des Tannenholzes, und ein Viertel von dem der Bögen, deren Schienen eine doppelte Breite haben. Die Figuren der Tafel VII. stellen die Formen des Bogens während der Versuche dar.

§. 4. Versuche mit dem Bogen Nr. 7 aus gebogenem Holze. (Siehe die Tafeln XII. u. XIII.)

Der aus Schienen von $0^m{,}027$ Dicke, die schwach unter einander verbunden waren, zusammengesetzte Bogen Nr. 2, schien mir den Minimalwerth von E für diese Art Bögen gegeben zu haben. Ich wünschte auch einen Maximalwerth zu erhalten, und liefs defshalb den Bogen Nr. 7 aus fünf Schienen von $0^m{,}054$ Dicke und $0^m{,}15$ Breite zusammensetzen. Um die günstigsten Bedingungen für den Widerstand desselben zu erreichen, legte man an der inneren und äufseren Seite des Bogens zwei volle Schienen ohne Stöfse, und brachte überdies Schraubbolzen vor und hinter jedem der Stöfse an, welche sich in den drei übrigen Schienen, deren ganze Anzahl nur sechs betrug, befanden; ferner fügte man am linken Ende noch zwei andere Schraubbolzen hinzu, so dafs im Ganzen vierzehn derselben vorhanden waren. Endlich vereinigte man die Schienen noch durch fünf starke eiserne Bügel. Die bei der Construction dieses Bogens angewandten

Vorsichtsmaafsregeln gaben ihm eine ungleich gröfsere Widerstandsfähigkeit als die des Bogens Nr. 2 war, wie man aus dem Detail der Versuche, denen er unterworfen wurde, beurtheilen kann.

Tabelle der Pfeile der Krümmung des Bogens Nr. 7 mit einem Gewichte, im Scheitel aufgehangen, belastet.

Gewicht, welches der Bogen trägt.	Beobachteter Pfeil der Krümmung.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Bemerkungen.
k			
544	0,020	27200	Die Formel, mittelst welcher man den Elasticitäts-Coefficienten berechnen kann, unter der Voraussetzung, dafs die Biegung des Bogens eben so wie die eines homogenen festen Körpers vor sich gehe, ist $E = 0{,}0469 \frac{PA^3}{ab^3}$ (Siehe den §. 2 Cap. VI.) in welcher P das ganze im Scheitel des Bogens aufgehangene Gewicht, A seine halbe Sehne, a und b die Breite und die Höhe seines Querschnitts bedeuten, wobei hier: $A = 6^m{,}06$, $a = 0^m{,}15$, $b = 0^m{,}28$, woraus $E = 32\,000 \frac{P}{f}$.
664	0,028	23700	
814	0,044	18500	
904	0,056	16143	
1054	0,066	16000	
1144	0,090	12710	
1264	0,094	13400	
Der Mittelwerth von $\frac{P}{f}$ ist 18235, woraus $E = 580\,000\,000$.			

Dieser Mittelwerth des Elasticitäts-Coefficienten eines Bogens aus gebogenem Holze ist nahe an drei Mal gröfser als der des Bogens Nr. 1, dessen Schienen halb so dick waren, und neun Mal gröfser als der des Bogens Nr. 2, dessen Schienen halb so breit und halb so dick waren. Ich will es nicht versuchen, eine Relation zwischen der Gröfse des Elasticitäts-Coefficienten und den Dicken und Breiten der Schienen, woraus man die Bögen aus gebogenem Holze zusammengesetzt, anfzustellen. Folgendes nur scheint mir nach den so eben von mir berichteten Thatsachen klar zu sein, nämlich:

1) Die Bögen aus gebogenem Holze leisten einen geringern Widerstand gegen Biegung als der eines homogenen festen Körpers von derselben Form und denselben Dimensionen ist, was sich leicht durch die Leichtigkeit, mit welcher die Schienen gegenseitig über einander gleiten, erklärt.

2) Dieser Widerstand gegen Biegung ist um so gröfser, je mehr Breite und Dicke die Schienen haben, je fester sie unter einander verbunden sind und je weniger zahlreich die Stöfse der Schienen an der äufseren und inneren Bogenfläche sind.

3) Das Minimum des Elasticitäts-Coefficienten kann in der Praxis gleich 60 000 000 und das Maximum zu 600 000 000 angenommen werden, denn es ist nicht wahrscheinlich, dafs man schwächere Bögen als den Bogen Nr. 2, so

wie mehr Widerstand leistende als den Bogen Nr. 7 herstellen werde. Es ist wirklich schon sehr schwierig, Schienen aus Tannenholz von $0^m,054$ Dicke für einen Bogen von 15^m Durchmesser zu biegen, und man mufs beachten, dafs in den äufseren und inneren Schienenlagen des Bogens Nr. 7 sich kein Stofs befand.

Es geht hieraus ebenfalls hervor, dafs die Bögen aus gebogenem Holze nur bei der Construction von Sprengwerken und Gespärren angewandt werden dürfen, die eine grofse Spannweite haben, und nur zur Verfertigung von Bögen, die einen so grofsen Halbmesser haben, dafs man auf ihrem Umfange Schienen von wenigstens $0^m,054$ Dicke biegen könne.

§. 5. Versuche mit Bögen aus auf die Hochkante gestellten Bohlen, welche nach Art der Bögen des Philibert de l'Orme zusammengesetzt sind.

Die grofse Biegsamkeit, welche ich bei den Bögen aus gebogenem Holze vorfand, machte den Wunsch in mir rege, mit ihnen die sogenannten Bögen des Philibert de l'Orme aus hochkantigen Bohlen zu vergleichen. Ehe ich aber die Tabelle mit den Resultaten der Versuche über diese Bögen hersetze, halte ich es für nöthig, Einiges über die Art des Widerstandes anzuführen, den sie der Wirkung des Gewichts, welches sie tragen sollen, entgegensetzen.

Betrachtet man zuerst einen Bogen, der aus einer Reihe von Bohlenstücken von geringer Länge besteht, die sich in auf die Krümmung normalen Stöfsen berühren, welche letztere in gewissen Abständen den Lauf der Fasern unterbrechen, so wird man leicht einsehen, dafs dieser Bogen, vermöge der Ausdehnung seiner Fasern, keinen Widerstand darbieten kann, und nur durch die Wirkung der Zusammendrückungen widerstehen kann, die an den inneren Kanten der Stöfse der verschiedenen Stücke ausgeübt werden.

Fügt man aber dieser ersten Lage von Bohlen eine zweite und eine dritte hinzu, und ordnet sie so an, dafs die Stöfse gewechselt sind, und stellt mittelst Hülfe von Nägeln und Pflöcken eine gewisse Gesammtbefestigung unter diesen drei Bohlenlagen her, so ist klar, dafs aufser dem wegen Zusammendrückungen sich zeigenden Widerstande sich auch Widerstände, die von der Ausdehnung der Fasern herrühren, entwickeln, weil die Continuität dieser letzteren theilweise wieder hergestellt ist. Indessen wird der Widerstand gegen Biegung immer nicht so grofs sein können, als der eines so homogenen festen Körpers, und wird sich demselben um so mehr nähern, je zweckmäfsiger und wirksamer die Verbindung der drei Lagen von Bohlen hergestellt ist.

Der Widerstand der Molecularkräfte, die durch die Zusammendrückung der Fasern in der Nähe der inneren Fläche des Bogens entwickelt werden, ist gleichfalls geringer als bei einem homogenen festen Körper von derselben Form und denselben Dimensionen, und dies aus zwei verschiedenen Ursachen.

Die erste Ursache ist das Oeffnen der Stöfse, welches im Scheitel und am Anfange des Bogens an der inneren Seite desselben und in einem Punkte, der

30° bis 32° über dem Horizont liegt, an der äufseren Seite desselben erfolgt, in einer ganz analogen Weise wie bei einem vollen Kreisgewölbe es der Fall ist. Aus diesem Ergebnifs folgt, dafs die Bohlenstücke nur mit ihren Kanten auf einander ruhen, und dafs nur ein kleiner Theil der Fasern der Zusammendrückung widersteht.

Noch ist eine zweite Ursache vorhanden, welche verhindert, dafs sich die Widerstände gegen Zusammendrückung mit aller ihrer Energie entwickeln. In der That sieht man, wenn man zwei aneinanderstofsende Stücke *ma* und *mb* (Fig. 10 Taf. II.), welche mit einem Stücke *ef* einer anderen Bohlenlage durch zwei Pflöcke *c* und *c'* verbunden sind, betrachtet, dafs, wenn der Stofs *mn* sich in *n* zu öffnen strebt, er auf den Punkt *m* einen Druck ausübt, dessen Bestreben dahin geht, die Stücke *am* und *bm* um den Punkt *m* zu drehen, welcher Druck aber nur durch den Widerstand des Stückes *ef* gegen Biegung ausgeglichen wird. Das Stück *ef* ist aber mit den beiden anderen nur durch die Pflöcke *c* und *c'* verbunden, und der in *m* ausgeübte Druck, der auf die beiden Punkte *c* und *c'* übertragen wird, sucht gleichzeitig das Stück *ef* zu biegen und der Länge nach aufzuspalten; denn wenn diese letzte Wirkung Statt gefunden hat, sind die Pflöcke *c* und *c'* gelöst, und die Stücke *am* und *bm* können sich frei um den Punkt *m* drehen.

Die Versuche zeigen nun, dafs der Bruch immer auf diese Weise erfolgt, so dafs also die Bohlenstücke weniger durch die Ausdehnung oder die Zusammendrückung ihrer Fasern, als durch den Zusammenhang derselben nach ihrer Längenrichtung widerstehn. Weil es aber für den gänzlichen Bruch des Bogens hinreichend ist, dafs unter den drei Reihen der aneinanderstofsenden Bohlen eine einzige gebrochen ist, so folgt, dafs, je dicker die Stücke sein werden, um so mehr Stärke der Bogen haben wird, und dafs es besser ist, die Dicke eines Bogens aus zwei Bohlenlagen als aus dreien zusammenzusetzen; selbst eine Lage würde besser als zwei sein, wenn man eine zweckmäfsige Art der Verbindung finden könnte.

Wenn man mehre Lagen anwendet, mufs man die Pflöcke so vertheilen, dafs sie auf die wirksamste Weise sich dem Oeffnen der Fugen zwischen den Stücken widersetzen, und so wenig wie möglich dazu beitragen, ein Zerreifsen der Bohlen in ihrer Längenrichtung herbeizuführen.

Es ist daher zweckmäfsig sie in Einschnitten anzubringen, die im Scheitel des Bogens und an den Anfängen an der äufseren Seite, an den Bruchstellen an der inneren Seite sich befinden, und ihnen eine gewisse Länge in der Richtung normal auf dem Bogen zu geben, damit sich die Stücke immer auf einige Centimeter Länge berühren, wenn die Stöfse sich zu öffnen streben.

Um den Einflufs der Verbindungsart der drei Reihen Bohlen und den der auf dem Umfange des Bogens vertheilten Anzahl Stöfse kennen zu lernen, liefs ich den Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr. 5 anfertigen, dessen drei Lagen nur mittelst Pariser Stiften genagelt waren. Beim Bogen Nr. 6 fügte man den Stiften, welche die Bohlen verbanden, noch Pflöcke aus Eichenholz hinzu. Der

Bogen Nr. 4 endlich, wurde aus Stücken von $1^m,30$ Länge, statt von $0^m,70$ angefertigt, welche Länge die Stücke des Bogens Nr. 5 u. 6 hatten. (Siehe §. 1 Cap. II.)

§. 6. Tabelle über die Biegung der Bögen Nr. 5, 6 und 4, aus auf die Hochkante gestellten Bohlen, vermöge der Einwirkung eines in ihrem Scheitel aufgehangenen Gewichts.

Bezeichnung der Bögen. (Siehe §. 1 Cap. II.)	Gewicht, welches der Bogen getragen hat.	Beobachteter Pfeil.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Werth des Elasticitäts-Coefficienten, nach den nebenstehenden Resultaten berechnet.
Bogen Nr. 5 aus drei Lagen Bohlen von $0^m,027$ Dicke, auf die Hochkante gestellt und blofs auf einander genagelt. (Siehe Taf IX.)	k 32 56 68 80*	 0,08 0,13 0,22 –	 400 430 300 –	Die hier anzuwendende Formel ist: $E = 0,222 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{f}$. Hier $a = 0,081$, $b = 0,15$, $A = 6,06$, $b^3 = 0,003375$, $ab^3 = 0,000273375$, $E = 180\,000 \frac{P}{f}$ woraus $E = 67\,680\,000$. * Unter Einwirkung dieses Gewichts wurde der Bogen zerstört, aus einigen Bohlen wurden die Nägel herausgerissen, und sie spalteten sich.
Mittelwerth von $\frac{P}{f}$.			376	
Bogen Nr. 6, wie der vorhergehende zusammengesetzt, aber mit durch die drei Lagen gehenden Eichenpflöcken versehen. (Siehe Taf. X.)	32 44 56 68 80 92 104*	0,272 0,105 0,140 0,220 0,265 0,302 0,350	444 420 400 327 302 304 300	$E = 180\,000 \frac{P}{f}$. Der Mittelwerth von $\frac{P}{f}$ ist hier nahe 357, woraus $E = 64\,260\,000$. * Dies Gewicht von 104^k genügte nicht, den Bruch des Bogens zu bewirken, und dieser nahm nach der Entlastung theilweise seine anfängliche Form wieder an.
Mittelwerth von $\frac{P}{f}$.			357	
Bogen Nr. 4 aus fünf Lagen Bohlen von 0,027 Dicke, auf die Hochkante gestellt, jedes Stück von $1^m,30$ Länge. (Siehe Taf. VIII.)	120 360 464 512 564	0,04 0,095 0,110 0,150 0,210	3000 3800 4218 2413 2685	Die hier anzuwendende Formel ist: $E = 0,222 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{f}$. $A = 6,06$, $a = 0,135$, $b = 0,15$, $b^3 = 0,003375$, $ab^3 = 0,003645$, $E = 108\,800 \frac{P}{f}$, und nach dem Mittelwerthe von $\frac{P}{f}$ $E = 371\,000\,000$.
Mittelwerth von $\frac{P}{f}$.			3423	

Vergleicht man die Bögen Nr. 4, 5 und 6 unter einander, so sieht man, dafs die Anzahl der Stöfse von grofsem Einflufs auf den Widerstand gegen Biegung ist, weil der Bogen Nr. 4, wo deren Zahl nur halb so grofs als in den beiden anderen ist, einen sechs Mal so grofsen Elasticitäts-Coefficienten besitzt.

§. 7. Von dem Widerstande der Holzbögen gegen Bruch und von der Grenze der dauernden Belastung, welche sie ertragen sollen.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dafs der Widerstand der Holzbögen gegen Biegung kaum die Hälfte von dem eines homogenen gebogenen Körpers von derselben Form und denselben Dimensionen beträgt. Die über ihren Widerstand gegen Bruch angestellten Versuche zeigen, dafs sie in dieser Hinsicht noch viel Geringeres leisten.

Durch die im Anhange Nr. 15 und 48 entwickelten Schlüsse würde man auch wirklich finden, dafs der Widerstand eines gebogenen Körpers gegen Bruch, proportional dem Gewichte ist, welches den Bruch verursacht, multiplicirt mit dem mittleren Halbmesser des Bogens, und dividirt durch das Product aus der Breite des Normal-Querschnitts, mit dem Quadrate der Höhe desselben.

Für die halbkreisförmigen Bögen, deren mittlerer Halbmesser A ist, a und b die Breite und Höhe des normalen Querschnitts, und die mit einem in ihrem Scheitel aufgehängten Gewichte P belastet sind, ist der Bruch-Coefficient R gleich $0{,}5456\frac{PA}{ab^2}$ (Nr. 48 des Anhangs.)

Es folge hier eine Versuchs-Tabelle über den Bruch von Bögen aus hochkantigen Bohlen und aus gebogenem Holze, mit den berechneten Werthen von R und dem Verhältnifs dieses Coefficienten zu dem eines homogenen Stückes.

Angabe der den Versuchen unterworfenen Bögen.	Mittlerer Halbmesser.	Querschnitt.	Gewicht, welches den Bruch verursachte.	Werth von R.	Verhältnifs von R zum Coefficienten eines homogenen Körpers.
Bogen Nr. 1 aus gebogenem Holze	6,06	$a = 0{,}150$ $b = 0{,}135$	k 754	939 500	0,1875
Bogen Nr. 2 aus gebogenem Holze	6,06	$a = 0{,}075$ $b = 0{,}138$	346	825 000	0,1550
Bogen Nr. 5 aus Bohlenstücken	6,06	$a = 0{,}081$ $b = 0{,}150$	200	383 350	0,0744
Bogen Nr. 4 aus Bohlenstücken	6,06	$a = 0{,}100$ $b = 0{,}150$	554	880 000	0,1760
Bogen von Reibell untersucht	4,00	$a = 0{,}120$ $b = 0{,}250$	4000	1 273 315	0,2546

Man sieht also, dafs selbst für solide und gut verbundene Holzbögen, wie es besonders die von Reibell den Versuchen unterworfenen waren, der Bruch-Coefficient kaum mehr als ein Viertel von dem eines homogenen Körpers beträgt.

Läfst man diese Folgerung gelten, so würde die Grenze der dauernden Belastung, die jede Flächeneinheit des Querschnitts eines Holzbogens tragen kann (welche Grenze gewöhnlich bei den Ingenieuren und Praktikern zu einem Zehntel des zerreifsenden Gewichts gerechnet wird), hier nach dem Versuche, der das gröfste Resultat gegeben hat, höchstens zu 1 273 315^{k} für den Quadrat-Meter festgestellt werden können. Da man bei der Construction des Bogens grofse Vorsicht anwenden und ihn durch Bänder und Bolzen verstärken, also ihm eine noch gröfsere Widerstandsfähigkeit als den bei den Versuchen gebrauchten Bögen verleihen kann, so wollen wir annehmen, dafs der Coefficient R des Bruchwiderstandes der Holzbögen bis zu 1 500 000^{k} für den Quadrat-Meter gesteigert werden könne, und die Grenze der bleibenden Belastungen noch zu einem Fünftel dieser Zahl, das heifst zu 300 000^{k}, festsetzen, was uns eine Grenze zu sein scheint, deren Ueberschreitung gefährlich sein dürfte.

Die mehr oder minder innige Verbindung zwischen den Bohlenlagen, erhöht oder verringert den Widerstand gegen Bruch sehr; denn der Bogen Nr. 5, dessen Bohlenlagen nur genagelt waren, wurde durch ein Gewicht von 80^{k} zerstört, dagegen war eine Belastung von 104^{k} noch weit entfernt, diese Wirkung hervorzubringen, nachdem Eichenpflöcke hinzugefügt waren, welche durch die drei Bohlenlagen gingen.

Vergleicht man den Verbrauch eines Cubik-Meters Holz, welches zu Bögen aus gebogenem Holze zugerichtet ist, mit dem zu Bögen aus hochkantigen Bohlen, so wird man finden, dafs unter der Form dieser letzteren es besser der Biegung und weniger gut dem Bruche widersteht, was durch die folgende Tabelle angegeben ist.

Bezeichnung der Bögen.	Cubikmaafs des Holzes der Bögen.	Mittelwerth von $\frac{P}{f}$.	Gewicht, welches, im Scheitel des Bogens aufgehangen, den Bruch verursachte.	Bemerkungen.
	cub. m.		k	
Bogen Nr. 1 aus gebogenem Holze	0,3846	1367	700	Man hat den Bogen Nr. 5 zur Vergleichung mit dem Bogen Nr. 2 genommen, weil er fast dieselbe Art der Zusammensetzung wie die Bögen nach Philibert de l'Orme, welche gewöhnlich zu Constructionen angewendet werden, hat.
Bogen Nr. 4 aus hochkantigen Bohlen	0,3800	3423	564	
Bogen Nr. 2 aus gebogenem Holze	0,162	211	296	
Bogen Nr. 5 aus hochkantigen Bohlen	0,200	357	Mehr als 104 Vielleicht 150	

Man wird später sehen, dafs, wenn es sich darum handelt, ein Dachgespärre

mit Bogen zu construiren, es viel wesentlicher ist, dem Bogen mehr Steifigkeit als Widerstandsfähigkeit gegen Bruch zu verleihen, vorausgesetzt, dafs diese Gespärre nur schwache Biegungen erfahren müssen und können. In dieser Beziehung verdienten die Bögen aus hochkantigen Bohlen den Vorzug vor denen aus gebogenem Holze.

Um die Untersuchungen über die Bögen aus hochkantigen Bohlen vollständig durchzuführen, hätte man den Einflufs der Zahl und der Dicke der Bohlenlagen, aus welchen man sie zusammensetzen kann, untersuchen müssen. Ich glaubte mich der über diesen Gegenstand nöthigen Versuche überheben zu können, indem ich von Neuem auf die Arbeit Reibell's, Directors der Seebauten zu Lorient, zurückkomme, aus welcher ich schon im Auszuge verschiedene Resultate über den Schub von Bögen gegeben habe. (Annales Maritimes et Coloniales, 22e année, 2e série, tome XI.)

§. 8. Auszug aus den Versuchen Reibell's über die Biegung von Bögen aus hochkantigen Bohlen.

Versuch Nr. 1, (Seite 1033 der citirten Nummer der Annales maritimes) über Bögen von Kreisform nach Philibert de l'Orme, von zwei Lagen Bohlen aus Enden von dort einheimischem Fichtenholze (pin) geschnitten, jede Lage hatte $0^m,09$ Dicke und $0^m,30$ Höhe rechtwinklig auf den Bogen gemessen; die Bohlen der einen Lage bedeckten die Stöfse der anderen Lage, und beide waren mittelst Eichenpflöcken und Nägeln in der Nähe der Stöfse verbunden. Die Enden wurden in ihrer Entfernung mittelst eines durch Gewichte gespannten Taues gehalten und diese Sehne des Bogens betrug $7^m,90$, der entsprechende Pfeil $3^m,50$.

Gewicht, welches der Bogen trug, im Scheitel desselben aufgehangen.	Beobachtete Senkung des Scheitels.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Berechnung des Werthes des Elasticitäts-Coefficienten nach dem Mittelwerthe von $\frac{P}{f}$.
k 150	0,002	75000	Die hier anzuwendende Formel ist:
300	0,005	60000	$E = 0,046 \frac{X^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{f}$ (§. 2 Cap. VI.)
450	0,009	50000	Hier $a = 0,18$, $b = 0,30$, $X = 7,90$,
600	0,011	54545	$X^3 = 495,409$, $ab^3 = 0,00486$,
Mittelwerth von $\frac{P}{f}$.		60000	$E = 4689 \cdot \frac{P}{f} = 4700 \frac{P}{f}$, woraus $E = 282\,000\,000$.

Aus der Zeichnung zu den Versuchen Reibell's geht hervor, dafs der Bogen, um den es sich hier handelt, aus Bohlenstücken von $3^m,22$ bis $4^m,25$ Länge zusammengesetzt war, und dafs sich in jeder Lage des Bogens nur 3 Stöfse befanden.

Zwei andere Bögen von derselben Form und denselben Dimensionen zerbrachen unter einer Belastung von 611^k, welche im Scheitel aufgehängt war. Reibell schreibt diesen Bruch der fehlerhaften Beschaffenheit des Holzes zu.

Derselbe Bogen wurde der Wirkung von Gewichten unterworfen, welche gleichförmig in Bezug auf eine Horizontale vertheilt waren. Um aus diesen Versuchen einen anderen Werth des Elasticitäts-Coefficienten zu finden, kann man $\frac{5}{8}$ des Gewichtes gänzlich im Scheitel des Bogens aufgehangen denken; danach wird die Formel: $E = 2937 \frac{P}{f}$.

Gleichförmig verbreitetes Gewicht, welches der Bogen trug.	Beobachtete Senkung des Scheitels.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Bemerkungen.
k			
2314	0,011	210000	Der Mittelwerth von $\frac{P}{f}$ ist 178 000,
2064	0,014	147000	
3164	0,019	166000	woraus $E = 522\,700\,000$.
4264	0,023	186000	
4914	0,027	182000	

Zweiter Auszug aus den Versuchen Reibell's. Versuch Nr. 2. (Seite 1009), mit einem fast halbkreisförmigen Bogen von $4^m,40$ halber Sehne und $3^m,74$ Pfeil, aus zwei Lagen von Bohlen aus Enden dort einheimischen Fichtenholzes geschnitten, jede Lage von $0^m,06$ Dicke und $0^m,25$ Höhe normal auf dem Bogen. Die Enden des Bogens waren in einen Spannriegel eingelassen.

Gewicht, welches der Bogen trug.		Beobachtete Senkung des Scheitels.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Berechneter Elasticitäts-Coefficient.	Bemerkungen.
k					Man hat A zu 4^m, Mittel aus $4^m,40$ und $3^m,74$ genommen.
93	i. Scheitel aufgeh.	0,003	31000	Der Mittelwerth	
336	Id.	0,006	56800	von $\frac{P}{f}$ ist	Der Werth von $\frac{P}{f}$, wenn die Gewichte im Scheitel des Bogens aufgehängt waren, ist in die Formel
486	Id.	0,011	44182	45 000, woraus:	
648	Id.	0,014	46285		$E = 0{,}222 \frac{PA^3}{fab^3}$ substituirt, welche
864	Id.	0,018	48222	$E = 337\,500\,000$.	nach den Daten zu $E = \frac{P}{f}.7500$ wird.
k					
450	gleichf. verbreitet.	0,003	150000		Der Werth für den Fall, wo das Gewicht gleichförmig auf dem Bogen verbreitet ist, ist in die Formel
900	Id.	0,007	128562	Der Mittelwerth	
1354	Id.	0,011	123090	von $\frac{P}{f}$ ist	$E = 0{,}084 \frac{PA^3}{fab^3}$ substituirt, welche
1800	Id.	0,014	128571	ungefähr	
2304	Id.	0,017	109423	130 000,	nach den Daten zu $E = 2857 \frac{P}{f}$ wird.
2754	Id.	0,021	133100		$a = 0{,}12$, $b = 0{,}25$, $b^3 = 0{,}015625$,
3204	Id.	0,025	139563	woraus:	$ab^3 = 0{,}00187506$, $A = 4{,}00$
3654	Id.	0,028	140538	$E = 371\,410\,000$.	$A^3 = 64{,}00$, $\frac{A^3}{ab^3} = 34133$.

Die Werthe des Elasticitäts-Coefficienten E für Bögen aus hochkantigen Bohlen, durch die Rechnung über die Versuche Reibell's erhalten, sind also:

Für in ihrem Scheitel belastete Bögen . . . . $\begin{cases} E = 282\,000\,000 \\ E = 337\,000\,000 \end{cases}$

Für Bögen, welche ein gleichförmig verbreitetes Gewicht tragen $\begin{cases} E = 583\,000\,000 \\ E = 371\,000\,000 \end{cases}$

Das Mittel aus diesen vier Werthen ist . . . . $E = 378\,000\,000$

Es ist nicht viel verschieden von dem, welches aus den Versuchen über den Bogen Nr. 4 zu 371 000 000 gefunden wurde. (Siehe §. 4 dieses Capitels.)

§. 9. Von den horizontalen Verschiebungen der Punkte an den Bruchstellen der Bögen.

Im Capitel VI §. 3 hat man gesehen, wie unter der Voraussetzung, dafs die Bögen nur geringe Biegungen erfahren, die Theorie für die Punkte des Bogens, die um 60° von der Verticale abstanden, die Horizontal-Verschiebungen beinahe gleich der Hälfte der Senkung des Scheitels gefunden hat, welche Relation aber nur für sehr wenig beträchtliche Formveränderungen gilt. Nach Maafsgabe, wie der Bogen sich mehr biegt, gehen die Durchschnittpunkte seiner neuen Krümmung mit seiner anfänglichen Figur immer weiter herunter, und die horizontalen Verschiebungen der Mitte des Theils der Krümmung, welcher zwischen dem Schnittpunkte m (Fig. 4 Taf. II.) und dem Fufs des Bogens liegt, sind immer weniger der Senkung im Scheitel gleich; augenscheinlich ist es, dafs die Grenze für das Verhältnifs $\frac{D}{f}$ gleich $\frac{1,1415}{4}$ ist, welches Statt finden würde, wenn der Bogen flach auf der Horizontale rechts und links derartig zusammengebogen wäre, dafs seine Enden dabei fest auf den äufsersten Punkten des Durchmessers ruhen blieben. Es folgt hieraus, dafs man bei der Anordnung der Bögen von Bogengespärren sicher ist, das Maximum gerechnet zu haben, wenn man die horizontale Verschiebung des obersten Endes des Pfostens als die Hälfte der Senkung des Scheitels annimmt.

Um diese Regel zu bestätigen, hätte man vielleicht die horizontalen Verschiebungen der Bruchstellen zu derselben Zeit, wie die Senkungen des Scheitels, von jedem der grofsen zu den Versuchen benutzten Bögen messen müssen, aber diese Maafsen waren mühsam zu erlangen, weil es schwierig war, sich seitlich den Bögen zu nähern, wenn die Gewichte daran aufgehängt waren. Man beschränkte sich daher darauf, sie ein Mal bei jedem Bogen mit aufzunehmen, wenn die Biegung ihr Maximum erreicht hatte und man die Krümmung der Aufsenseite des Bogens aufzeichnete.

Um diese Unterlassung zu ergänzen, stellte ich sorgfältig einen Versuch im Kleinen mit einem Bogen aus einer einzigen Schiene Ulmenholz an, die nach der auf Taf. XXIII dargestellten Curve gebogen war. Dieser Bogen wurde im Scheitel mit verschiedenen Gewichten belastet, und bei jeder Vermehrung des Gewichts zeichnete man die Figur, welche er annahm, auf. (Siehe Taf. XXIII.)

Ich habe den Werth des Elasticitäts-Coefficienten dieses kleinen Bogens berechnet, und ihn wenig verschieden von dem, welchen man durch Versuche über eine gerade Schiene erhalten würde, gefunden. Wenn er geringer ist, so rührt dies daher, dafs die Elasticität der Schiene nothwendiger Weise etwas durch die Biegung, die sie hatte annehmen müssen, geschwächt war; ungeachtet dieses Umstandes zeigt sich die Abwesenheit der parallelen oder transversalen Fugen nicht wenig durch eine grofse Vermehrung des Widerstandes gegen Biegung.

Tabelle der Versuche mit einer Schiene von Ulmenholz, von 0,009 Breite und 0,0035 Dicke, in Form eines Bogens, dessen halbe Sehne 0,26 war, gebogen.

Gewicht, welches der Bogen trug, in seinem Scheitel aufgehangen.	Senkung des Scheitels.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Maximum der horizontalen Verschiebung.	Verhältnifs der horizontalen Verschiebung der Bruchstellen und der Senkung des Scheitels.
k 1,927	0,014	137	0,008	$^4/_7$
3,909	0,049	80	0,028	$^4/_7$
4,231	0,075	56	0,043	$^4/_7$

Um den Elasticitäts-Coefficienten E zu berechnen, benutze ich die Formel $E = 0{,}222 \frac{A^3}{ab^3} \cdot \frac{P}{f}$ als wenn der Bogen halbkreisförmig wäre, setze $A = 0{,}26$, $A^3 = 0{,}017576$, $a = 0{,}009$, $b = 0{,}0035$, $b^3 = 0{,}000\,000\,042\,873$, woraus $E = 10\,110\,000 \frac{P}{f}$.

Der Mittelwerth von $\frac{P}{f}$ ist 84, daher $E = 860\,000\,000$ anstatt $1000\,000\,000$, was man bei einer geraden homogenen Schiene erhalten würde.

Ich gebe jetzt als Nachweisungen, die Verschiebungen der Punkte der grofsen Bögen aus gebogenem Holze und aus hochkantigen Bohlen von 12m,12 Durchmesser, welche 30° mit dem Horizonte machen, für Biegungen die nahe denen liegen, die den Bruch erzeugen.

Angabe der Bögen.	Gewicht, welches der Bogen trug.	Senkung des Scheitels.	Horizontale Verschiebung in Metern.	Mittlere horizontale Verschiebung.	Verhältnifs der horizontalen Verschiebung an den Bruchstellen zu der Senkung des Scheitels.
Bogen Nr. 1 aus gebogenem Holze.	605k im Scheitel aufgehängt.	0,62	0,275 0,000	0,275	0,44
Bogen Nr. 1 Id.	1127k gleichförmig verbreitet.	0,62	0,50 0,10	0,30	0,48
Bogen Nr. 2 Id.	128k im Scheitel aufgehängt.	0,58	0,28 0,28	0,28	0,48
Bogen Nr. 2 Id.	224k gleichförmig vertheilt.	0,30	0,70 0,32	0,19	0,63
Bogen Nr. 5 aus hochkantigen Bohlen.	605k im Scheitel aufgehängt.	0,21	0,11 0,15	0,13	0,62
Bogen Nr. 6 Id.	68k im Scheitel aufgehängt	0,24	0,11 0,15	0,13	0,54
Bogen Nr. 6 Id.	288k gleichförmig verbreitet.	0,66	0,45 0,32	0,38	0,57

§. 10. Summarische Darstellung der Versuche über die Biegung der Bögen.

Die in den Versuchen über die Biegung der Bögen bemerkten Thatsachen, welche als die nützlichsten für die Anordnung derselben erscheinen, sind die folgenden:

1) Die Bögen aus gebogenem Holze biegen sich wie homogene feste Körper, und man kann die verticalen und horizontalen Verschiebungen von irgend einem ihrer Punkte durch die im Capitel VI. §. 2 angegebenen theoretischen Formeln berechnen.

2) Der Werth des Elasticitäts-Coefficienten dieser Bögen ist um so geringer, je schwächer die Dicke der Schienen ist, aus welchen sie zusammengesetzt sind, und je weniger stark und zahlreich die Schrauben sind, welche sie vereinigen. Dieser Werth ist höchstens die Hälfte von dem, welcher für ein homogenes festes Prisma gilt. Sein Maximum ist 500 000 000.

3) Der Bruch findet durch die Ausdehnung der Fasern der äufseren Bogenfläche Statt, in einem von der Verticale um 60° bis 65° entfernten Punkte, wefshalb man vermeiden mufs, in diesem Punkte Fugen an der äufseren Fläche des Bogens zu haben. Der Bruch-Coefficient beträgt höchstens drei Fünftel von dem eines homogenen Prismas.

4) Der Krümmungs-Pfeil im Scheitel kann bei Halbkreisbögen einem Zehntel des Durchmessers gleich werden. Berechnet man also ihren Querschnitt derartig, dafs der Pfeil der Krümmung, welchen sie unter der zu ertragenden Belastung annehmen, einem Hundertel des Durchmessers gleich ist, so wird man genügende Solidität erreichen.

5) Die horizontale Verschiebung der Punkte auf einem Halbkreisbogen, die 60° bis 65° von der Verticale entfernt sind, ist gleich der Hälfte der Senkung des Scheitels bei derselben Belastung.

Für die Bögen nach Philibert de l'Orme oder aus auf die Hochkante gestellten Bohlen:

1) Die Biegung geht in continuirlicher Weise und wie bei einem homogenen festen Körper vor sich. Man kann gleichfalls auf sie die Formeln des Capitels VI. §. 2 anwenden.

2) Der Werth des Elasticitäts-Coefficienten wächst mit der Länge und der Dicke der Stücke, aus denen der Bogen zusammengesetzt ist, und mit der Solidität der Verbindungen an den Vereinigungspunkten. Der Elasticitäts-Coefficient der am besten construirten Bögen übertrifft nicht 500 000 000.

3) Der Bruch geschieht gleichzeitig durch die Compression der Bohlenstücke, die 65° von der Verticale abstehen, an der inneren Bogenfläche, indem diese sich mit ihren Ecken auf einander liegend zerdrücken, und durch das Zerreifsen dieser selben Stücke nach der Längenrichtung, indem sie der Wirkung nachgeben, welche die Pflöcke oder die Querriegel ausüben, um sie in ihrer Länge aufzuspalten. Der Bruch-Coefficient ist höchstens gleich drei Fünfteln von dem eines homogenen Stückes.

4) Der Krümmungs-Pfeil der Bögen ist im Augenblick des Bruches das Doppelte der horizontalen Verschiebung der Bruchstellen, und übersteigt nicht ein Dreifsigstel des Durchmessers. Man mufs diese Bögen also so berechnen, dafs die Senkung des Scheitels, wenn es möglich ist, nur ein Dreihundertel des Durchmessers oder höchstens ein Einhundertfünfzigstel desselben betrage.

Achtes Capitel.

Resultate der Versuche über die Biegung der verschiedenen Systeme von Bogengespärren.

§. 1. Versuch über die Biegung des einfachen geraden Gespärres Nr. 8.

Ehe ich vollständige Systeme der Bogengespärre den Versuchen unterwarf, hielt ich es für angemessen, zuerst Versuche mit dem einfachen geraden Gespärre Nr. 8 anzustellen, welches zu ihrer Zusammensetzung diente, um, wenn es anginge, dahin zu gelangen, die Rolle kennen zu lernen, welche die Bögen bei dem Totalwiderstande der Gespärre spielen, von denen sie einen Theil

ausmachen. Das Gespärre Nr. 8 hatte fast denselben Querschnitt wie die Bögen Nr. 2 und 3, aber viel mehr Steifigkeit, wodurch es möglich wurde, ihm eine gleichförmig auf der Länge der Sparren verbreitete Belastung zu geben, in derselben Weise, wie das Gewicht der Bedachung auf den Dachgespärren vertheilt wird.

Am Ende des §. 4 des Capitels VI hat man gesehen, dafs die Formel, welche die Senkungen des Scheitels des Gespärres Nr. 8 giebt, ist:

$$f = 57716 \cdot \frac{P}{E}, \quad \text{woraus}$$

$$E = 57716 \frac{P}{f}.$$

Diese Formel wurde durch Betrachtungen abgeleitet, welche ganz mit denjenigen identisch sind, wodurch die Formeln über den Bögen erhalten wurden, und sie mufs für den Elasticitäts-Coefficienten E des Gespärres Nr. 8 Werthe geben, die sich mit dem Elasticitäts-Coefficienten der Holzbögen vergleichen lassen. Erinnert man sich aber des beträchtlichen Einflusses, welchen die Anzahl der Schienen in den Bögen aus gebogenem Holze und die Anzahl der Stöfse oder die Gröfse der Stücke in den Bögen aus hochkantigen Bohlen ausübt, so wird es nicht überraschen, wenn man den Elasticitäts-Coefficienten der aus geraden Stücken zusammengesetzten Gespärre um vieles den der solidesten Bögen überwiegend findet.

Dies durch Versuche erhaltene Resultat giebt die folgende Tabelle an. Um jedoch dasselbe bemerkbarer zu machen und den Zweifeln vorzubeugen, welche über die Identität der Entstehung der Elasticitäts-Coefficienten und über das Recht, sie gegenseitig zu vergleichen, entstehen könnten, bemerke ich, dafs man die Differenz, welche zwischen dem Widerstand der Bögen und dem des geraden Gespärres gegen dieselbe Einwirkung von Zug oder Druck Statt findet, sofort beurtheilen kann, wenn man nur die Werthe von $\frac{P}{f}$ unter einander vergleicht, welche die Versuche über Bögen und gerade Gespärre von gleichem Querschnitt und bei derselben Belastung geliefert haben.

Aus den Formeln des §. 2 Capitel VI ersieht man, dafs die Senkungen des Scheitels eines und desselben Bogens, wenn dieselbe Belastung zuerst gleichförmig in Bezug auf eine Horizontale verbreitet, dann gänzlich im Scheitel aufgehängt ist, sich zu einander wie 0,084 zu 0,222 oder wie nahe 3 zu 8 verhalten. Nimmt man also die Resultate der Versuche über die Biegung der Bögen Nr. 1 und 4 die im Capitel VII §§. 2 und 6 angeführt sind, und multiplicirt die dort erhaltenen Werthe von $\frac{P}{f}$ mit $\frac{8}{3}$, so erhält man Vergleichswerthe zwischen diesen Bögen und dem geraden Gespärre, die von jeder Voraussetzung über die Schärfe der Formeln für den Elasticitäts-Coefficienten frei sind, und welche um so übereinstimmender sein werden, je gröfser die Querschnitte der mit den geraden Gespärren verglichenen Bögen sind und je mehr sich der Cubikinhalt beider der Gleichheit nähert. In der That hat:

der Bogen Nr. 1, an Querschnitt: $0^m,15$ zu $0^m,136$ und an Cubikinhalt: $0^m,38$,
der Bogen Nr. 4, an Querschnitt: $0^m,135$ zu $0^m,15$ und an Cubikinhalt: $0^m,38$,
das gerade Gespärre an Querschnitt: $0^m,075$ zu $0^m,12$ und an Cubikinhalt: $0^m,31$.

§. 2. Tabelle über die Senkungen des Scheitels des Gespärres Nr. 8, bei auf der Länge des Sparrens gleichförmig vertheilter Belastung und Vergleichung seines Widerstandes gegen Biegung mit dem der kreisförmigen Holzbögen.

Ganzes Gewicht, gleichförmig auf die Sparren vertheilt.	Beobachtete Senkung des Scheitels.	Werth von $\frac{P}{f}$.	Vergleichung zwischen dem Mittelwerthe von $\frac{P}{f}$ aus dieser Tabelle u. demjenigen aus den über die Bögen Nr. 1 u. 4. gemachten Versuchen.	Bemerkung über Bewahrung der Elasticität des Gespärres Nr. 8.
k 288	0,001	288 000	Der Mittelwerth $\frac{P}{f}$ für das Gespärre Nr. 8 ist 17000. Für den Bogen Nr. 1 ist er 3645. Für den Bogen Nr. 4 ist er 9128.	Nachdem das Gespärre Nr. 8 von der Belastung von 1692k wieder befreit war, nahm der Scheitel bis nahe auf einige Millimeter seine ursprüngliche Lage wieder an.
404	0,020	25 200		
720	0,040	18 000		
828	0,050	16 560		
936	0,060	15 716		
1368	0,100	13 680		
1692	0,140	12 085		

Betrachtet man zuerst das Gespärre Nr. 8, so wird man bemerken, dafs man, wenn die Formel des §. 4 Capitels VI. $E = 57716 \frac{P}{f}$ auf dasselbe angewandt und für $\frac{P}{f}$ der Mittelwerth 17000 substituirt wird, $E = 981\,172\,000$ ist, welcher Werth wenig von 1 000 000 000, als dem durch directe Versuche gefundenen, abweicht.

Vergleicht man ferner die Werthe von $\frac{P}{f}$, einerseits der Bögen Nr. 1 und 4. und andererseits des Gespärres Nr. 8, so läfst sich schliefsen, dafs unter Einwirkung gleicher Belastungen der Bogen Nr. 4 sich zwei Mal so viel und der Bogen Nr. 1 sich vier bis fünf Mal so viel als das Gespärre Nr. 8 senken wird, so dafs der Widerstand dieses letzteren gegen Biegung respective das Doppelte und das Vierfache von dem der Bögen Nr. 4 und 1 bei gleichem Cubikinhalt an Holz und bei viel geringeren Kosten sein wird.

§. 3. Resultate der Versuche über die Biegung der zusammengesetzten Gespärre.

Die Verschiedenheit der Biegsamkeit der Bögen und der geraden Gespärre hat bedeutenden Einflufs auf die Verbindung des Gespärres mit einem Bogen, was die folgende Tabelle bemerken läfst.

Tabelle der Biegungen der verschiedenen Systeme von zusammengesetzten Gespärren für auf die Länge der Sparren gleichförmig vertheilte Belastungen. (Siehe die Tafeln XIV. bis XXII. incl.)

Gewicht, welches die Gespärre tragen, gleichförmig auf den Sparren verbreitet.	Senkung des Scheitels des Gespärres bei den Systemen:						
	des einfachen geraden Gespärres Nr. 8.	des Gespärres mit Bogen aus gebogenem Holze, mit verticalen Zangen, Nr. 9.	des Gespärres mit Bogen aus gebogenem Holze, mit verticalen Zangen, Nr. 11.	des Gespärres mit Bogen aus hochkantigen Bohlen, Nr. 12.	des Gespärres mit Bogen aus hochkantigen Bohlen, mit Eichenpflöcken, Nr. 13.	des geraden zusammengesetzten Gespärres, Nr. 14.	des geraden zusammengesetzten Gespärres, Nr. 15.
k							
288	0,001	0,01	0,005	0,01	0,007	0,009	0,002
504	0,020	0,02	0,027	0,024	0,016	0,017	0,006
720	0,040	0,038	0,034	0,038	0,023	0,024	0,013
828	0,050	–	–	–	–	–	–
936	0,060	0,055	0,043	0,054	0,025	0,032	0,019
1368	0,100	0,085	0,083	0,086	0,055	0,053	0,031
1692	0,140	0,143	Ein zufällig Statt gefundener Bruch hat die Fortsetzung des Versuches gehindert.	0,130	0,068	0,064	0,036
2016		0,193		0,155	0,080	0,078	0,044
2232		0,230		0,170	0,108	0,088	0,051
2448		0,320		0,188	0,130	0,097	0,055
2664		Bruch.		0,220	0,155	–	–
2880				Bruch nach einer halben Stunde.	Der Bruch fand nicht gänzlich Statt.	0,124	0,065
3312						0,144	0,078
3528						0,160	0,088
3744						Darauf Bruch.	0,090
3960							0,105
							Darauf Bruch.
Mittelwerthe von $\frac{P}{f}$, von $P = 504^k$ an bis $P = 1692$.	17000	17800	19300	17200	27600	27900	53800

Diese Tabelle zeigt die ganz einfache und leicht zu begreifende, aber darum nicht minder interessante Thatsache: dafs nämlich der Widerstand eines aus einem einfachen Gespärre und einem Bogen zusammengesetzten Gespärres, oder eines einfachen Gespärres und eines Systems von geraden Hölzern um so gröfser ist, je steifer der Bogen, oder je wirksamer das System der hinzukommenden geraden Stücke sich der Biegung des einfachen geraden Gespärres widersetzt, welches unmittelbar der Einwirkung der Belastung unterworfen ist.

In der That erkennt man, dafs die Gespärre mit Bögen aus gebogenem Holze Nr. 9 und 11, und das Gespärre aus hochkantigen Bohlen Nr. 12, deren Bögen sehr biegsam sind, eine nicht merklich gröfsere Widerstandsfähigkeit als das einfache gerade Gespärre besitzen. Der Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr. 13 erhöht bedeutend die Widerstandsfähigkeit des Systemes, weil er steifer als die

vorigen ist. Die Vermehrung des Widerstandes ist gleichfalls bei dem zusammengesetzten geraden Gespärre Nr. 14 sehr beträchtlich.

Das System Nr. 15 endlich, in welchem die Sparren des geraden Gespärres durch Tragbänder gestützt sind, die sich wirksam der Biegung derselben widersetzen, übertrifft die anderen Systeme so sehr, dafs die Senkungen des Scheitels nur ungefähr ein Drittel von den bei derselben Belastung bei dem geraden Gespärre sind, und die Hälfte von den bei dem Gespärre mit Bogen aus hochkantigen Bohlen Nr. 13, welches am besten widersteht.

§. 4. Art und Weise in der das Gewicht sich auf die Sparren und den Bogen vertheilt, je nach dem Verhältnisse, welches zwischen diesen beiden Haupttheilen der Bogengespärre Statt findet.

Die Tabelle der Werthe $\frac{P}{f}$, die für alle Gespärre zwischen denselben Grenzen $P = 504^k$ und $P = 1692^k$ genommen waren, kann als Maafs für den Grad des Widerstandes dienen, welchen die Anbringung eines Bogens dem Widerstande eines einfachen Gespärres hinzufügt.

Man sieht zum Beispiel, dafs für das Gespärre Nr. 13, dessen Bogen Nr. 6 nach Philibert de l'Orme gut construirt und durch Pflöcke von Eichenholz gesichert war, der Werth $\frac{P}{f} = 27600$ ist, während für das einfache gerade Gespärre Nr. 8, $\frac{P}{f} = 17000$ ist. Hieraus folgt aber, dafs, um bei den Gespärren Nr. 13 und Nr. 8 gleiche Senkungen oder gleiche Krümmungspfeile zu erzeugen, man Gewichte aufbringen mufste, die sich respective zu einander wie 276 zu 170 oder wie 10 : 6 verhalten, was sich noch anders ausdrücken läfst, indem man sagt, der Bogen trägt $\frac{4}{10}$ des Gewichts, mit dem das vollständige Gespärre belastet ist. Um bei der Angabe dieser Thatsache den Querschnitt nicht mit in Frage zu ziehen, mufste man diese Vermehrung des Widerstandes auf den Werth zurückführen, welchen sie gegeben haben würde, wenn, wie bei den Gespärren Nr. 9, 11 und 12 der Bogen gleichen Querschnitt mit den Sparren des geraden Gespärres gehabt hätte; setzt man nun voraus, dafs die Vermehrung des vom Bogen herrührenden Widerstandes proportional dem Cubus der Höhe und der ersten Potenz der Breite seines Querschnitts ist, so würde (der Gröfse des Querschnitts des Bogens und dem des geraden Gespärres Nr. 8 zufolge) aus dieser Hypothese hervorgehen, dafs die Vermehrung des Widerstandes, statt einer Verminderung von $\frac{4}{10}$ der Belastung gleich zu gelten, sich auf $\frac{3}{10}$ derselben reduciren würde, wenn der Querschnitt des Bogens gleich dem der Sparren wäre.

Bei Annahme dieser Hypothese könnte man folgende Regel aufstellen: Wenn in einem Bogengespärre der Bogen und die Sparren denselben Querschnitt haben, so trägt der erste eine Last, die sich zu der, welche die letzteren tragen, wie 3 zu 7 verhält. Bezeichnet man also mit P' den Theil der Belastung, von

welchem die Sparren durch Hinzutritt des Bogens befreit werden, mit P' den Theil, welchen die Sparren noch zu tragen übrig behalten, mit h und b die Dicken (Höhen) des Sparrens und des Bogens, so findet zwischen diesen vier Werthen die Proportion Statt:

$$\frac{7}{3} : \frac{P}{P'} = 1 : \frac{h^3}{b^3},$$

denn macht man $h = b$, so erhält man hieraus:

$$P : P' = 7 : 3.$$

Aber welches Verhältnifs zwischen h und b ist das vortheilhafteste in Bezug auf die Stabilität eines Bogengespärres? Augenscheinlich mufs dies Verhältnifs so gewählt sein, dafs ein Bruch in dem Sparren und im Bogen gleichzeitig eintritt. In der That, wenn der Widerstand gegen Bruch in dem einen Theile bedeutend, in dem anderen geringe wäre, so würde der erste allein widerstehn und für sich allein brechen, wodurch unmittelbar der Bruch des anderen herbeigezogen würde, und auf diese Weise der Widerstand des Systems auf den eines dieser beiden Theile reducirt wäre. Je mehr sich aber die Spannung beider der Gleichheit nähert, wird sich auch ihr Widerstand vermehren, und wenn endlich Gleichheit eintritt, wird auch der Widerstand sein Maximum erreicht haben.

Durch eine ziemlich einfache Rechnung (siehe Anhang Nr. 49), findet man nun, dafs ein Gewicht P, welches gleichförmig auf der Länge des Sparrens eines einfachen geraden Gespärres verbreitet ist (Taf. XIV.), wenn dieser einen Winkel ω mit der Verticale macht, seine Länge X, sein Querschnitt $l.h$ und der Elasticitäts-Coefficient E ist, eine Verkürzung gleich:

$$\frac{P}{E}\left(\frac{\cos\omega}{2lh} + \frac{0,75\,X\sin\omega}{lh^2}\right)$$

auf die Längeneinheit hervorbringt.

Die Fasern dieses Theils befinden sich also in denselben Umständen, als wenn sie direct durch eine Kraft:

$$P.\left(\frac{\cos\omega}{2lh} + \frac{0,75\,X\sin\omega}{lh^2}\right) \quad \text{(§. 2 Cap. VI.)}$$

für jede Flächeneinheit des Querschnitts zusammengedrückt würden; bezeichnen wir diese Kraft mit F.

Wenn ein Gewicht P' so auf einem halbkreisförmigen Bogen vertheilt ist, dafs auf gleiche Längen der Horizontal-Projection gleiche Gewichte kommen, und A den Halbmesser des Bogens, a und b die Seiten des Querschnitts, E' den Elasticitäts-Coefficienten bezeichnet, so wird es die Fasern auf die Längeneinheit um eine Gröfse gleich

$$\frac{P'}{E'}\left(\frac{1,36}{ab} + \frac{0,51\,A}{ab^2}\right) \quad \text{(Anhang Nr. 47)}$$

verkürzen.

Die Fasern des Bogens können also, als von einer Kraft, die, auf die Flächeneinheit bezogen, gleich

$$P'\left(\frac{1{,}36}{ab}+\frac{0{,}51\,A}{ab^2}\right) \quad (\S.\ 2\ \text{Cap. VI.})$$

ist, direct in Anspruch genommen gedacht werden, und diese Kraft möge F' genannt werden.

Bezeichnen wir nun wie oben (§. 2 Cap. VI.) mit R und R_1 die Bruch-Coefficienten, das heifst diejenigen Gewichte, welche ein Prisma, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, zerreifsen oder zerbrechen können, so ist klar, dafs die Tendenz zum Bruche beim Sparren und beim Bogen dieselbe sein wird, wenn die Kräfte F und F', welche auf diese Theile einwirken, gleiche Bruchtheile der Gewichte R und R_1 sind, d. h. wenn man hat:

$$\frac{P}{R}\left(\frac{\cos\omega}{2lh}+\frac{0{,}75\,X\sin\omega}{lh^2}\right)=\frac{P'}{R_1}\left(\frac{1{,}36}{ab}+\frac{0{,}51\,A}{ab^2}\right). \quad (A)$$

Diese Gleichung, mit der $\frac{P}{P'}=\frac{7h^3}{3b^3}$ verbunden, giebt ein Mittel, das für den gesammten Widerstand des Systems vortheilhafteste Verhältnifs von $\frac{h}{b}$ zu berechnen.

Wenden wir dies beispielsweise auf das Bogengespärre Nr. 13 (Taf. XX.) an. Für dies System hat man: $a=l$, $\cos\omega=0{,}544$, $X\sin\omega=0{,}92\,R_1\,\frac{A}{h}=50$. Setzen wir $b=nh$ woraus $\frac{P}{P'}=\frac{7}{3n^3}$, und erinnern wir uns, dafs nach den Versuchen im Cap. VII. §. 7 für die Holzbögen R_1 zu 1 500 000^k gefunden ist. Uebrigens ist klar, dafs der Bruch-Coefficient für den Sparren eines geraden Gespärres von dem eines homogenen Holzes nicht verschieden sein kann, und man demnach R gleich 5 000 000^k hat.

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung (A), so erhält man

$$n=-9{,}375\pm\sqrt{111{,}69}\,.$$

Der positive Werth von $n=1{,}202$ giebt das vortheilhafteste Verhältnifs zwischen der Dicke des Bogens und der des Sparrens, und in Worten ausgedrückt: mufs also die Dicke des ersteren die des letzteren um ein Fünftel bis ein Viertel übertreffen.

Es ist bemerkenswerth, dafs dieses Verhältnifs bei mehren älteren Gespärren und ebenfalls bei dem der Reitbahn von Chambière zu Metz beobachtet worden ist. Die Thatsachen, auf welche sich die obige empirische Regel stützt, betreffen eigentlich nur die Bögen aus hochkantig gestellten Bohlen; indessen, da man bei den Bögen aus gebogenem Holze, wenn man nur eine genügende Anzahl Schrauben und Bänder anwendet, einen Widerstand gegen Biegung erhalten kann, der dem der übrigen Bögen fast gleich kommt, so möchte ich, in Ermangelung specieller Versuche über diese Art Bögen, vorschlagen, dieselbe Regel auch auf sie anzuwenden und sie um ein Viertel dicker als die Sparren der geraden Gespärre zu machen, mit denen sie verbunden werden.

§. 5. Vergleichung des Widerstandes der Bogengespärre mit dem der zusammengesetzten geraden Gespärre.

Es ist unnöthig, sich über die Thatsachen, welche die Tabelle des §. 4 vollständig erkennen läfst, noch weiter zu verbreiten. Man erkennt, dafs das Gespärre Nr. 15, dessen Cubikinhalt $0^{m. cub.},405$ beträgt und welches 45 bis 50f kosten würde, zwei Mal besser der Biegung widersteht als das Bogengespärre Nr. 13, welches von allen den Versuchen unterworfen gewesenen das solideste ist, und bei einem Cubikinhalt von $0^{m. cub.},54$, 92f,29 kosten würde.

Hiernach scheint also, dafs der einzige Vorzug, den die Bogengespärre, mit den geraden Gespärren verglichen, besitzen, in ihrer mehr gefälligen Form beruht, dafs aber bei den wichtigen Fragen nach Solidität und Billigkeit die ersteren den letzten sehr untergeordnet sein möchten.

§. 6. Ueber die bemerkenswerthesten und wesentlichsten Umstände bei der Biegung und dem Bruch der einfachen geraden Gespärre.

Ein Blick auf die Figur der Tafel XIV wird genügend erkennen lassen, dafs die Art und Weise, in welcher die Biegung der einfachen geraden Gespärre vor sich geht, ganz den Angaben der Theorie entsprechend ist.

Der Sparren nimmt bei der Biegung eine Krümmung an, die nach der inneren Seite des Dachstuhls hin convex ist, und der Ständer, der, wenn sein Fufs nicht an seinem Platze gehalten würde, in demselben Sinne wie der Sparren sich biegen würde, ist im Gegentheil gezwungen eine Krümmung im umgekehrten Sinne anzunehmen, woraus denn folgt, dafs der Verbindungspunkt des Pfostens mit dem Sparren sich horizontal verschiebt und sich der Mauer, welche die Schwelle und den Fufs der Leersparren unterstützt, zu nähern strebt. Es ist leicht einzusehn, dafs diese Verschiebung immer viel geringer als die Senkung des Scheitels des Gespärres ist, und man wird den gröfsten Werth der ersteren erhalten, wenn man annimmt, dafs sie die Hälfte der Gröfse der letzteren beträgt.

Wenn die Verbindungen der beiden Sparren und die des Sparrens mit dem Ständer solide hergestellt sind, bleiben die Winkel A und C constant, und der Sparren widersteht der Biegung wie ein in A und C befestigtes Stück, welches der Wirkung eines auf seiner Länge gleichförmig vertheilten Gewichts $P \sin \omega$ unterworfen ist.

Die Stuhlsäule (oder der Pfosten) trägt, wenn sie vertical steht, das ganze Gewicht des halben Gespärres, welches sie zusammenzudrücken sucht, überdies strebt eine Kraft gleich dem Horizontalschube des Gespärres an seinen Auflagern, sie zu biegen und in ihrem Verbindungspunkte mit dem Tragbande zu brechen. Sie befindet sich also in denselben Umständen wie ein in C (Taf. XIV.) befestigtes Stück, welches in M durch eine Kraft $\frac{P}{2}$ zusammengedrückt, in demselben Punkte der Wirkung einer Kraft Q ausgesetzt ist, wobei P das ganze Gewicht des Gespärres und Q den Schub an den Auflagern bezeichnet.

Wird die Biegung des Sparrens beträchtlicher, so überträgt sich der gröfste Theil der Belastung vom Sparren auf das Tragband und von diesem Stücke auf den Pfosten. Aufserdem wird dieser letztere durch das Bestreben des Sparrens sich um das eine Ende des Tragbandes zu drehen, vertical aufwärts gedrückt; wenn aber der Pfosten so berechnet ist, dafs er den oben besprochenen Kräften widerstehen kann, wird er auch den nöthigen Widerstand diesen letzteren Wirkungen entgegensetzen können, die hier nur erinnerungsweise angeführt wurden.

Die Versuche zeigen, dafs wirklich das Gespärre gleichzeitig in A, E, C und D (Fig. 8 Taf. II.) zu brechen sucht, und fand dieser Bruch bei einem gut geleiteten Versuche, wo die Senkung des Scheitels fast genau in der Verticale erfolgte, wirklich Statt. Bei anderen Versuchen, wo das Gespärre sich nach der einen Seite mehr als zur anderen neigte, ereignete sich der Bruch blofs in C und D. (Fig. 8 Taf. II.)

§. 7. Ueber die bemerkenswerthesten Umstände bei der Biegung und dem Bruch der Bogengespärre und der zusammengesetzten geraden Gespärre.

Wenn der Bogen bedeutend biegsamer ist als die Sparren, wird das aus der Verbindung beider zusammengesetzte Bogengespärre der Biegung oder dem Bruche nicht mehr widerstehn als das einfache gerade Gespärre für sich allein, und die Vorgänge bei der Biegung werden dieselben sein, wie die so eben im vorhergehenden Paragraphen angeführten.

Besitzt aber der Bogen Steifigkeit genug, um dem geraden Gespärre einen Theil seiner Belastung abnehmen zu können, so wird er gleichzeitig mit dem geraden Gespärre biegen und brechen. Die Bruchstellen des letzteren sind dessen ungeachtet dieselben wie in den vorhergehenden Fällen. Auch der Bogen bricht in zwei Punkten, die auf jeder seiner Hälften um 65° von der Verticale durch den Scheitel entfernt liegen, ganz in derselben Weise, als wenn er von dem ihn einrahmenden Gespärre isolirt wäre. (Siehe Taf. XIX.)

Die Vorgänge bei der Biegung und bei dem Bruche der zusammengesetzten geraden Gespärre sind den bei den Versuchen über die einfachen geraden Gespärre bemerkten gleich, und die Bruchpunkte bleiben auch dieselben. Der Widerstand dieser Gespärre, sei es gegen Biegung oder gegen Bruch, ist viel kräftiger als derjenige der am besten construirten Bogengespärre. Sie haben also vor diesen den Vorzug der Solidität und Billigkeit. Endlich kann man sie so zusammensetzen, dafs sie, was Eleganz und Regelmäfsigkeit der äufseren Form angeht, den Bogengespärren nicht nachstehen. (Siehe Taf. XXIV.)

Neuntes Capitel.

Uebersicht der in den vorhergehenden Capiteln enthaltenen Thatsachen und Anwendung der auf Anordnung der Gespärre von grosser Spannweite sich beziehenden Formeln.

§. 1. Von dem Schube, welchen die Dachgespärre in der Ebene ihres Auflagers ausüben.

Unter den eben berichteten Resultaten der Versuche sind jene wohl die wichtigsten, welche zeigen, dafs, wie auch immer die Form und die Art der Construction des Gespärres sei, dasselbe immer gegen seine Widerlager Wirkungen in horizontaler Richtung äufsert und diese nach aufsen hin umzukanten sucht. Es giebt nur zwei Mittel, dem Umkanten der Stützmauern der Gespärre von grofser Spannweite zuvorzukommen. Das erste und wirksamste besteht darin, ihre Fufspunkte durch Zugbänder von Holz oder Eisen zusammenzuhalten, und das zweite ist, den Auflagern eine solche Stabilität zu geben, dafs sie im Stande sind, dem Schube das Gleichgewicht zu halten. Hierbei ist die Bedingung zu erfüllen, dafs das Moment des Gewichts der Mauer oder des Pfeilers in Bezug auf die äufsere Kante seiner Basis gleich dem Moment des Schubes des Gespärres auf dieselbe Drehaxe bezogen ist.

Vielleicht ist es nicht überflüssig hinzuzufügen, dafs, wenn der Boden prefsbar ist, die Resultante aus dem Horizontalschube, dem Gewicht des Pfeilers und der verticalen Pressung, welche dieser erfährt, durch den Schwerpunkt der Unterfläche des Fundaments gehen mufs, und demgemäfs ist es vortheilhaft, die Absätze des Fundaments an der äufseren und nicht an der inneren Seite anzubringen, wie man wohl zuweilen gethan hat.

Wirft man einen Blick auf die Fig. 5 Taf. II., so sieht man, dafs, wenn D die Entfernung der Gespärre, P das Gewicht jedes halben Gespärres, A die halbe Weite des Gebäudes, h die Höhe der Mauer von der Ebene durch den Fufspunkt der Gespärre bis zum Kranzgesimse, e die Dicke dieses Theils, H die Höhe der Mauer vom Boden an bis zum Fufspunkt der Gespärre und E die Dicke derselben, Q den Schub des Gespärres und endlich p das Gewicht des Cubikmeters Mauerwerk bezeichnet, man erhalten wird

$$\frac{pD}{2}(e^2h + E^2H) + \frac{EP}{2} = QH, \quad \text{woraus}$$

$$E = -\frac{P}{2pDH} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4p^2D^2H^2} + \frac{2Q}{pD} - \frac{e^2h}{H}}. \quad \text{(A)}$$

Es mufs bemerkt werden, dafs h eine Function des Winkels ist, welchen die

Sparren mit der Verticale einschliefsen. Bezeichnet man diesen Winkel mit ω und mit A den Halbmesser des halbkreisförmig gedachten Bogens, so hat man

$$h = A \text{ tang } \tfrac{1}{2}\,\omega, \qquad \text{(Anhang Nr. 43.)}$$

Die obige Gleichung (A) setzt voraus:

1) Dafs die Mauer als ein zusammenhängendes Stück, zwischen zwei auf einander folgenden Gespärren, umgekantet wird.

2) Dafs weder zufällige Mehrbelastung, wie z. B. bei einem Schneefall noch Stöfse, wie sie z. B. der Wind ausüben kann, vorkommen, und endlich, giebt sie mit diesen beiden Bedingungen nur das genaue Gleichgewicht.

Die Erfahrung zeigt aber, dafs eine Mauer, welche an einem Punkte durch eine horizontale Kraft gedrückt wird, nicht in einem ganzen Stücke bricht, während sie um die äufsere Kante ihrer Basis sich dreht, sondern nach zwei geneigten Linien, und zwar so, dafs sich ein Dreieck loslöst, dessen Spitze am Boden und dessen Basis in der Ebene der horizontal angreifenden Kraft liegt, woraus hervorgeht, dafs das Moment des Mauergewichts annähernd durch 2 dividirt werden mufs. Andererseits ist es zweckmäfsig, das Moment des Schubes in der Rechnung zu verdoppeln, um gegen Stöfse und zufällige Belastungen sicher zu sein, und endlich mufs man Letzterem das Moment noch einmal hinzufügen, damit der Widerstand gröfser als der Schub sei, denn das genaue Gleichgewicht würde keine Sicherheit gewähren.

Man kann also die vorhergehende Gleichung jetzt zweckmäfsig folgendermaafsen schreiben:

$$\frac{pD}{4}\left(e^2h + E^2H\right) + \frac{EP}{2} = 3QH,$$

woraus man erhalten wird:

$$E = -\frac{P}{pDH} \pm \sqrt{\frac{P^2}{p^2D^2H^2} + \frac{12Q}{pD} - \frac{e^2h}{H}}$$

Für die Anwendung dieser Formel will ich Dachstühle voraussetzen, deren Sparren auf 3 Basis zu 2 Höhe geneigt und mit 400^k auf den laufenden Meter ihrer Horizontal-Projection belastet sind, zugleich möge der Cubikmeter Mauerwerk 2000^k wiegen, so dafs folgt:

$$p = 2000^k, \qquad \text{tang}\,\omega = 1{,}53, \qquad \text{hieraus} \qquad h = 0{,}61\,A.$$

Ueberdies hat man

$$P = 400\,A \qquad \text{und} \qquad Q = 0{,}42\,P = 168\,A.$$

Für den Abstand der Gespärre will ich einen Mittelwerth setzen und $D = 3{,}30$ annehmen; durch Substitution dieser Werthe wird der Werth von E:

$$E = -0{,}06\frac{A}{H} \pm \sqrt{0{,}0036\frac{A^2}{H^2} + 0{,}3206\,A - 0{,}61\frac{Ae^2}{H}},$$

und nach dieser Formel erhält man bis auf einige Centimeter genau folgende Tabelle, indem die Resultate in runden Zahlen hingestellt sind.

Tabelle der Mauerstärke für die Umfassungsmauern von Gebäuden grofser Weite, deren Dächer durch Gespärre ohne Durchzüge getragen werden.

Spannweite des Gespärres in Metern.	Abstand der Gespärre in Metern.	Höhe der Fufspunkte des Gespärres über dem Boden.	Dicke der Mauer vom Boden bis zum Fufspunkte des Gespärres.	Dicke der Mauer vom Fufspunkte des Gespärres bis zum Kranzgesimse.	Breite des Fundaments in einem Meter Tiefe unter dem Boden.	Bemerkungen.
m	m	m	m	m	m	
24	3,30	3	1,62	0,60	2,01	
24	3,30	5	1,80	0,60	2,25	
20	3,30	3	1,40	0,50	1,75	
20	3,30	5	1,60	0,50	2,00	
16	3,30	3	1,35	0,40	1,70	
16	3,30	5	1,42	0,40	1,80	

Man beachte im Bezug auf die Anwendung der Formel und der vorhergehenden Tabelle: 1) Dafs die erhaltenen Mauerstärken nur für den Fall gelten, dafs das Erdreich fast unprefsbar ist. 2) Wenn der Grund unter dem Gewichte des Mauerwerks ausweichen würde, so müfste man, nachdem man zuerst alle zweckmäfsigen Vorsichtsmaafsregeln getroffen, um ihm mehr Halt zu geben, die Breite der Absätze des Fundaments, vielleicht selbst die Stärke der Mauer zwischen dem Boden und dem Fufspunkte der Gespärre vergröfsern, denn wenn sich der Untertheil der Mauer an der äufseren Seite nur wenig in den Boden eindrückt, wird schon der Hebelarm des Widerstandes bedeutend verringert werden. 3) Die Stärken für den Theil der Mauer vom Fufspunkte der Gepärre bis zum Kranzgesimse sind unter der Voraussetzung bestimmt, dafs dieser Theil der Mauer keinen Horizontalschub erleide; es ist also von Wichtigkeit, die Construction so einzurichten, dafs horizontale oder schief gerichtete Drücke, welche das Gespärre gegen den Obertheil dieser Mauer ausüben könnte, sei es nun durch die horizontale Verschiebung der Punkte an den Bruchstellen des Bogens oder in Folge einer Senkung des Scheitels durchaus vermieden werden.

Um sich gegen die erste Einwirkung zu schützen, müfste man im Voraus annähernd die Gröfse der horizontalen Verschiebung der Bruchstellen berechnen, und den Pfosten (die Stuhlsäule) des geraden Gespärres so gegen das Innere des Gebäudes neigen, dafs, wenn obige Wirkung vollständig Statt gefunden, der Pfosten beinahe vertical stände. Es wird auch immer gut sein, zwischen der inneren Mauerfläche und dem Ende der Zangen des Pfostens Platz zu lassen; vor Allem aber hüte man sich, das untere Ende des Sparrens auf der Mauer aufruhen zu lassen.

Um zu verhindern, dafs ein Theil des Gewichts der Bedachung auf dem Kranzgesimse ruhe, und die Leersparren dieses nach aufsen zu schieben suchen, möchte ich vorschlagen, die Mauerschwelle vorläufig auf Keile zu legen, deren Höhe gleich der Gröfse wäre, um die sich der Scheitel des Gespärres senkte, dann nach Maafsgabe des Aufbringens der Belastung und der allmählichen

Senkung des Scheitels die Keile zu lösen und die Schwelle so sich senken zu lassen, dafs die Leersparren des Daches vollständig auf den Pfetten ruhen blieben. Die Beobachtung dieser Vorsichtsmaafsregeln ist wesentlich, wenn man den Umsturz des oberen Theils der Mauer vermeiden will, welcher Unfall in drei mir neuerlich zur Kenntnifs gekommenen Fällen zu befürchten stand.

In den Paragraphen 3 und 4 dieses Capitels wird man Formeln und Tabellen finden, aus denen zu entnehmen ist, um wie viel die Scheitel der geraden Gespärre oder der Bogengespärre in Folge des Gewichts der Bedachung während ihrer Aufstellung sich senken. Man kann diese Gröfse verdoppeln, um zufällige Mehrbelastungen oder unvorhergesehene Stöfse mit zu berücksichtigen. Die horizontale Verschiebung der Bruchstellen des Gespärres ist überdies gleich der Hälfte der Senkung des Scheitels.

Die sich auf den Schub gegen die Widerlager beziehende Formel und die aus ihrer Anwendung hervorgehende Tabelle können für gerade Gespärre und für Bogengespärre gebraucht werden. Die folgende Tabelle der Mauerstärken verschiedener Gebäude, von 15^m bis 23^m Weite, wird gewifs nicht ohne Interesse sein, und bei Vergleichung derselben mit der oben gegebenen Tabelle wird man finden, dafs die von mir gebrauchte Formel Resultate giebt, welche von den in der Praxis angenommenen Mauerdicken nicht sehr abweichen.

Angabe der Gebäude.	Spannweite und Abstand der Gespärre.	Belastung auf den laufenden Meter der Horizontal-Projection des Sparrens.	Höhe des Fußpunktes der Gespärre über dem Boden.	Mauerstärken: vom Boden bis zum Fußpunkt der Gespärre.	Mauerstärken: vom Fußpunkt der Gespärre bis zum Kranzgesimse.	Breite der Absätze des Fundaments.	Bemerkungen.
	m	k	m	m	m	m	
Wagenschuppen zu Marac. (Fig. 1 Taf. XXVI.)	$P = 20{,}00$ $E = 3{,}00$	456	3,00	1,20	0,60	0,05	
Reithaus zu Libourne. (Siehe Nr. 10 des Memorial du génie.)	$P = 21{,}00$ $E = 3{,}20$	500	7,40	1,30	1,05	0,40	Bei jedem Gespärre findet sich ein geböschter Strebepfeiler, vom Boden bis zum Kranzgesimse, dessen Dicke in der halben Höhe gemessen, 0m,70 ist.
Reithaus von Saumur. (Fig. 1 Taf. XXVIII.)	$P = 23{,}00$ $E = 4{,}53$	360	2,80	1,32	0,60	0,15	Die Dimensionen der Mauer genügten nicht dem Schube der Gespärre zu widerstehn, doch muſs bemerkt werden, daſs der Boden preſsbar war.
Reithaus von Aire. (Fig. 2 Taf. XXVII.)	$P = 19{,}00$ $E = 3{,}25$	390	1,80	1,80	1,00	0,10	Im Innern des Reithauses von Aire und Saumur, bildet das Fundament für die Schlagbretter (garde-bottes) einen Absatz, der die Stabilität der Mauer nur durch sein Gewicht vermehrt.
Exercirhaus d. Artillerie und Ingenieurschule z. Metz. (Fig. 2 Taf. XXVI.)	$P = 22{,}00$ $E = 6{,}50$	650	5,00	Die Gespärre ruhen auf Pfeilern von 1,20	0,50	0,00	Diese Dimensionen schienen ungenügend, und man hat bei jedem Gespärre noch Strebepfeiler hinzugefügt.
Arsenalschmiede zu Cherbourg. (Fig. 1 Taf. XXVII.)	$P = 17{,}00$ $E = 4{,}23$	380	3,00	Die Gespärre ruhen auf Pfeilern von 1,45 zu 1,40	0,65	0,00	Es fanden hier Bewegungen des Mauerwerks Statt, welche vermuthen lassen, daſs die Dimensionen der Mauer und Pfeiler etwas schwach sind.
Reithaus von Chambière. (Fig. 5 Taf. I.)	$P = 18{,}00$ $E = 2{,}60$	690	1,90	1,60	1,00	0,20	Die Höhe des Fundaments ist 2m,50.
Reithaus der Artillerie- und Ingenieurschule. (Fig. 2 Taf. XXVI.)	$P = 13{,}40$ $E = 0{,}70$	60	3,00	0,70	0,50	0,00	Dies Gebäude ist solide

§. 2. Berechnung des Querschnitts der hauptsächlichsten Theile der Dachstühle groſser Gebäude und der Bogenbrücken.

In den folgenden Paragraphen werde ich das benutzen, was die in den Vorhergehenden berichteten Versuche über den specifischen Widerstand verschiedener Systeme von Gespärren geliefert haben, um die Querschnitte der vorzüglichsten Theile dieser Systeme, mittelst aus der Theorie der Biegung gerader und gebogener prismatischer Körper abgeleiteter Formeln zu berechnen.

Dabei werde ich nach einander betrachten:

1) Die Gespärre nach Palladio, aus Holz und Eisen, auf Taf. XXV. dargestellt.

2) Die geraden zusammengesetzten Gespärre, wie das auf Taf. XXIV.

3) Die Bogengespärre von Emy und die von Philibert de l'Orme oder von Lacaze. (Taf. XXVI., XXVII. und XXVIII., und Taf. I. Fig. 5.)

4) Die durch Bögen getragenen Brücken. (Taf. II. Fig. 12, 13 und 14.)

Die Formeln zur Berechnung der Querschnitte der geraden Gespärre oder der Bogengespärre sind sehr einfach und durch leicht zu verstehende Betrachtungen herzuleiten. Es ist bekannt, dafs in jedem Systeme von Gespärren jeder Theil im Allgemeinen zwei Arten von Kräften Widerstand leisten mufs, von denen die einen parallel zur Länge, die anderen normal auf der Länge des Stückes wirken. Diese, wenngleich nach zwei verschiedenen Richtungen wirkenden, Kräfte bringen dennoch Wirkungen derselben Art hervor; denn wenn die ersteren direct die Fasern des Stückes auf der ganzen Querschnittsfläche zusammendrücken oder ausdehnen, so bewirken die zweiten eine Biegung, deren Erfolg eine Verlängerung der Fasern der convexen Seite und eine Verkürzung derselben an der concaven Seite ist, und zwar so, dafs, wenn ein Stück blofs durch Biegung bräche, der Bruch ebenfalls in Folge einer Zusammendrückung oder einer Ausdehnung der Fasern vor sich ginge.

Zahlreiche Versuche sind von verschiedenen Ingenieuren zur genauen Bestimmung des Gewichts angestellt und bekannt gemacht worden, welches an Prismen von verschiedenem Material, deren Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, angehängt, diese zerreifsen oder zerdrücken kann. Andererseits nimmt man an, dafs, damit die Constructionen eine gewisse Sicherheit gewähren, sie nur mit einem Bruchtheil des Gewichts belastet werden dürfen, welches den Bruch herbeiführt. Dieser Bruchtheil hat für leichte und provisorische Constructionen einen geringeren Werth als für solche, bei denen man eine lange Dauer erreichen will. Im ersten Falle kann die Grenze der dauernden Belastung bis zu einem Viertel des Gewichts gehen, welches Bruch erzeugt, im zweiten darf sie höchstens ein Achtel von diesem betragen.

Von diesen Daten ausgehend, stellt man fest, dafs die Verlängerung oder Verkürzung, welche die am meisten ausgedehnte oder verkürzte Faser in Folge der Biegung und directer Zusammendrückung erfährt, diejenige nicht übertrifft, welche die gröfste Belastung hervorbringen würde, der man die Fasern des Stückes aussetzen will, d. h., nennt man Ω die Querschnittsfläche des Stückes, T die direct zusammendrückende Kraft, F einen Druck auf die Flächeneinheit, welcher durch directe Compression bei den Fasern des Stückes dieselbe Verkürzung hervorbringen würde, wie die, welche die am meisten zusammengedrückte Faser während der Biegung erfährt, R' die gröfste Kraft zum Zusammendrücken, der man jede Flächeneinheit des Querschnitts aussetzen darf, E das Gewicht, welches im Stande ist, das Stück um seine eigne Länge zu verkürzen, so wird man erhalten:

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\Omega} + \frac{F}{E} \quad \text{oder} \quad R' = \frac{T}{\Omega} + F.$$

Dies ist die allgemeine Form der Formeln, die ich im Folgenden angeben werde und deren Herleitung in den Nr. 36 bis 50 des Anhangs nachgesehen werden kann.

Ich bemerke noch besonders, dafs die im Folgenden gegebenen Formeln sich alle auf *solide* und *dauernde* Constructionen beziehen; für provisorische Constructionen wird man *blofs die Dicke* (*Höhe*) *der Stücke* auf sieben Zehntel von der durch die Formel gefundenen zu reduciren brauchen, die andere Dimension (Breite) aber unverändert lassen.

§. 3. **Formeln über das Gespärre von Palladio (Taf. XXV.) in seiner Anwendung bei Dachstühlen grofser Gebäude. (Nr. 36 bis 40 des Anhangs.)**

Es werde mit P das Totalgewicht, welches der Sparren AM (Fig. 1 Taf. XXV.) trägt, bezeichnet, das Gewicht des halben Dachstuhls AMO mit inbegriffen; mit P' und P'' die Theile dieses Gewichts, welche resp. von den Stücken CM und AC getragen werden, mit a und b die Breite und die Dicke (Höhe) des Querschnitts, und mit L die Länge der Horizontal-Projection des einen oder des anderen dieser beiden Stücke CM und AC; durch X' die Länge AB' oder OD des Durchzuges zwischen zwei aufeinander folgenden Auflagepunkten; durch Π die Dichte des Materials, aus dem der Durchzug besteht, für Eisen $\Pi = 7500^k$, für Eichenholz $= 950^k$ und für Tannenholz $= 550^k$, durch o die halbe Weite und durch h den ganzen Pfeil (die ganze Höhe) des Gespärres, oder durch $\frac{o}{h}$ die Tangente des Winkels, welchen der Sparren mit der Verticale macht; dies vorausgesetzt, erhält man zur Berechnung des Querschnitts dieser Stücke folgende Formeln:

Oberer Theil des hölzernen Sparrens, (CM) . . . . $ab^2 = P'\,(0{,}00000111 \,.\, b + 0{,}00000107\,L)$

Unterer Theil des hölzernen Sparrens, (AC) . . . . $ab^2 = P''(0{,}00000257 \,.\, b + 0{,}00000107\,L)$

Spannriegel von Holz . . . . $ab = 0{,}0000009\,P''\frac{o}{h} + 0{,}00000107\,\Pi a X^2$

Durchzug von Holz, keinen Fufsboden tragend . . $ab = 0{,}0000009\,P\,\frac{o}{h} + 0{,}00000107\,\Pi a X^2$

Id. von Eisen. Id. . . $ab = 0{,}0000001\,P\,\frac{o}{h} + 0{,}00000011\,\Pi a X^2$

Für diejenigen, die sich der Berechnung dieser Formeln entheben wollen, lasse ich eine theilweise empirische Tabelle über den Querschnitt der Gespärre nach Palladio folgen und zwar für Spannweiten von 14^m bis 24^m und einem mittleren Abstande der Gespärre von $3^m{,}50$, dabei eine mittlere Neigung des Daches mit dem Horizont von 3 Basis zu 2 Höhe vorausgesetzt.

Die durch diese Tabelle angegebenen Querschnitte sind stark und genügen, was auch immer das Bedachungsmaterial des Dachstuhls sein möge, vorausgesetzt, dafs eine beträchtliche Mehrbelastung nicht zu fürchten ist.

Tabelle der Spannweiten und Querschnitte der Gespärre nach Palladio, mit Zugstangen und Hängestangen von Eisen, auf Taf. XXV. Fig. 1 dargestellt.

Spannweite des Gespärres in Metern.	Querschnitt der Hölzer und Metern.				Dimensionen der Eisentheile in Metern.	
	Obertheile des Sparrens.	Untertheil des Sparrens.	Der Spannriegel.	Die Streben.	Querschnitt der Zugstange.	Durchmesser der Hängestangen.
24	0,20 0,26	0,30 0,44	0,30 0,30	0,15 0,15	0,025 0,061	0,025
22	0,18 0,25	0,30 0,42	0,30 0,30	0,14 0,14	0,025 0,057	0,025
20	0,17 0,24	0,27 0,38	0,27 0,27	0,13 0,13	0,021 0,061	0,021
18	0,16 0,23	0,26 0,36	0,26 0,26	0,12 0,12	0,021 0,058	0,021
16	0,15 0,21	0,24 0,33	0,24 0,24	0,11 0,11	0,015 0,063	0,015
14	0,14 0,19	0,22 0,30	0,22 0,22	0,10 0,10	0,015 0,059	0,015

Noch sind einige Bemerkungen über die Anordnung dieses Dachstuhls zu machen.

1) Man kann die Länge des unteren Theils (AC) des Sparrens aus zwei durch einen Hakenkamm, wie im Detail B Taf. XXV. angegeben, vereinigte Stücke, oder einfach, mittelst Schraubbolzen verbunden, herstellen. Man kann auch seine Dicke aus zwei Theilen anordnen, wie es in Fig. 1 Taf. I. dargestellt ist.

2) Beim Aufstellen des Dachstuhls mufs man der Zugstange und den Hängestangen von Eisen eine gewisse Spannung geben. Die Streben werden diese letzteren wohl darin erhalten, aber die Zugstange mufs stark angezogen werden, und wenn sie bei einer niedrigen Temperatur angebracht wird, mufs man sie verkürzen nach Maafsgabe, wie die Temperatur sich steigert. Man kann dies leicht bewerkstelligen, wenn man an einem oder an zwei Punkten der Stange einen beweglichen Ring (touret), Taf. XXV. Detail A, oder eine Muffe anbringt.

3) Damit die Zugstange, wenn sie von Eisen ist, dem vermehrten Zuge der im Winter bei der Verminderung der Temperatur entsteht, widerstehen könne, mufs die Querschnittsfläche, die ich durch Ω bezeichnen will, folgender Gleichung Genüge leisten:

$$\Omega = \frac{0{,}625\, P \frac{o}{h}}{12\,000\,000 - (V - V') \times 224\,000}$$

in welcher P, o und h dieselben Werthe wie oben bedeuten, V die höchste und V' die geringste Temperatur im Jahre ist, an dem Orte, wo der Dachstuhl sich befindet.

4) Es wird nöthig sein, auf solide Weise die Gespärre gegen Einwirkungen des Windes zu schützen, um sie in ihrer anfänglichen verticalen Ebene zu erhalten, und die im Durchschnitt (Fig. 2 Taf. XXV.) angedeuteten Zangen dienen zur Erreichung dieses Zweckes.

§ 4. Beispiel der Anwendung der Formeln zur Berechnung des Gesparres von Palladio, auf Taf. XXV. gezeichnet.

Die Pressungen, denen die Gespärre der Dächer zu widerstehen haben, sind: 1) Ihr eigenes Gewicht; 2) das Gewicht der Bedachung, Belattung, Leersparren und Pfetten mit inbegriffen; 3) Gewicht einer Schneelage, deren Dicke und Dauer von localen Verhältnissen abhängt; 4) die durch Wirkung des Windes hervorgebrachten Pressungen. Die Art der Bedachung und die Gröfse ihres Gewichts richtet sich nach der Localität, wo der Dachstuhl sich befindet, und variirt beträchtlich, je nach der Beschaffenheit des angewandten Materials. Es folge hier eine Tabelle, die angenäherte Resultate enthält, zum Gebrauch beim ersten Entwurf.

Tabelle der Neigungen und der Gewichte des Quadratmeters wirklicher Dachfläche, für die verschiedenen gebräuchlichsten Arten Bedachungsmaterial.

Art der Bedachung.	Neigung des Daches mit dem Horizont, in Graden.	Gewicht des wirklichen Quadratmeter Bedachungsflache.	Menge des Holzes in Cubikmetern, welches das Dachgerüst auf den Quadratmeter Bedachung enthalt.
	° °	k	m.cub.
Flache Ziegel mit Haken (Biberschwanze)	45 bis 33	60	0,063
Trocken gelegte Hohlziegel (Pfannen)	27 bis 21	75 bis 90	0,058
Idem in Kalk gelegt	31 bis 27	136	0,068
Schiefer	45 bis 33	38	0,056
Gewalztes Kupfer	21 bis 18	14	0,042
Zink Nr. 14	21 bis 18	8,50	0,042
Asphalt (Mastic bitumineux)	21 bis 18	25	0,056

Bemerkung. Tannenholz wiegt 500 bis 600k pr. Cubikmeter. Eichenholz 900 bis 950k.

Der Schnee wiegt ungefähr zehn Mal weniger als Wasser, und man kann seine gröfste Dicke in der er sich auf einem Dache ansammeln kann, zu 0m,50 schätzen, welche Dicke eine Mehrbelastung von 50k auf den Quadratmeter hervorbringen würde.

Der Wind kann starke Pressungen gegen die Dachfläche ausüben, die aber vorübergehend sind; es würde also eine übergrofse Vorsicht sein, wenn man diese zu den dauernden Belastungen rechnen wollte.

Pressungen, welche der Wind ausübt, der in normaler Richtung auf einen Quadratmeter Oberfläche trifft.

Geschwindigkeit des Windes in 1 Secunde.	Pressung in Kilogrammen.
m	k
3,00	1,047
5,00	2,908
8,00	7,443
10,85	13,691
14,00	22,795
20,00	46,520
40,00 (Orkan)	186,080 -

Mittelst dieser Angaben wollen wir eine specielle Anwendung der Formeln des vorhergehenden Paragraphen machen.

Wir betrachten zu diesem Ende ein Gebäude von 20^m innerer Weite, welches mit Schiefer gedeckt ist und eine Neigung von 3 Basis zu 2 Höhe hat (was nahe einer Neigung 33° mit dem Horizont entspricht.) Ferner mögen die Gespärre (Binder) aus Tannenholz, welches 600^k der Cubikmeter wiegt, construirt sein und sich in Abständen von 3 Metern befinden.

Die halbe Weite des Gebäudes ist also . . . . $10^m,00 = o$
Seine Höhe $\frac{2}{3} \times 10^m,00 =$ . . . . $6^m,66 = h$

	m
Die Länge der Dachfläche daher: $\sqrt{100 + 44,44} =$	12,018
Hinzu die Mauerdicke und Ausladung des Kranzgesimses	0,800
Die gesammte Länge einer Dachseite also	12,818
	quadratm.
Der Abstand der Gespärre (Binder) beträgt 3^m, folglich wird die gesammte, durch einen Sparren getragene, Dachfläche sein	37,954

	k
Das Gewicht eines Quadratmeters Bedachung ist	38,00
Das Gewicht des Zimmerwerks auf den Quadratmeter ist $0^{m.cub.},056 . 600^k =$	33,60
Hinzu für eine mögliche Schneelage von $0^m,25$ Dicke	25,00
Für die Pressung des Windes, dessen Geschwindigkeit 6 bis 7 Meter per Secunde sein möge	4,40
Das Maximum des Gewichts von einem Quadratmeter der Bedachung wird also sein	100,00

welches mit der oben angegebenen Totaloberfläche Bedachung multiplicirt, für die Belastung eines Sparrens in runden Zahlen giebt . . . . $3900^k = P$
Der obere Theil des Sparrens möge davon tragen . . . . $1300^k = P'$

Der untere Theil des Sparrens möge davon tragen . . . . $2600^k = P''$
Die Horizontal-Projection des ersteren ist . . . . $3^m,333 = L$
Die Horizontal-Projection des zweiten ist . . . . $6^m,666 = L$

Ihr Querschnitt wird durch nachstehende Formeln erhalten:
Oberer Sparren: $ab^2 = 1300\,(0{,}00000111\,b + 0{,}000003566)$,
Unterer Sparren: $ab^2 = 2600\,(0{,}00000257\,b + 0{,}000007132)$.

Gewöhnlich nimmt man im Voraus eine der Dimensionen des Querschnitts an, und ich will hier die Breite der Sparren zu $0^m,16$ nehmen; setze ich diesen Werth von a in den beiden Formeln, so erhalte ich in runden Zahlen:

Für den oberen Sparren . . . . . $b = 0^m,18$,
Für den unteren Sparren . . . . . $b = 0^m,36$.

Ich komme jetzt zur Zugstange, die ich von Eisen annehme, und von 5 zu 5 Meter Entfernung durch Hängestangen gehalten denke. Nach diesen Voraussetzungen erhält man $X^2 = 25$; $\Pi = 7500$, überdies $P = 3900^k$; $\frac{o}{h} = \frac{3}{2}$.
Diese Werthe in die Formel für die Zugstange gesetzt, erhält man:

$$ab = 0{,}000585 + 0{,}020625 \, . \, a.$$

Nimmt man $a = 0{,}02$ an, so findet man $b = 0{,}05$ in runden Zahlen.

Die Berechnung des Querschnitts der Zugstange ist indessen noch nicht beendigt, da jetzt noch untersucht werden mufs, ob sie die durch Veränderung der Temperatur entstehenden Spannungen ertragen kann. Ich gebrauche die Formel:

$$\Omega = \frac{0{,}625\,P\frac{o}{h}}{12\,000\,000 - (V - V')\,224\,000},$$

und nehme an, die Temperatur könne bis 25° über 0 steigen und bis — 15 unter 0 sich erniedrigen, d. h. $V - V' = 40$ sein. P, o und h haben dieselben Werthe wie oben, und die Formel giebt für das Minimum der Oberfläche, welche der Querschnitt der Zugstange haben mufs:

$$\Omega = 0{,}0012^{\text{quadratm.}}.$$

Man sieht also, dafs ein Querschnitt von 0,02 zu 0,05, der nur 0,0010 Quadratmeter Oberfläche hat, was die Stärke wegen Wechsels der Temperatur angeht, zu schwach ist, ein Querschnitt von 0,02 Breite und 0,06 Höhe würde beiden Bedingungen genügen.

Was die Streben und Hängestangen betrifft, so kann man ihre Dimensionen aus der Tabelle, Seite 87 entnehmen. Den Spannriegel würde man eben so wie die Zugstange berechnen, oder man kann auch, um sich die Rechnung zu ersparen, ihm die Dicke des oberen Sparrens und die Breite des unteren Sparrens geben, d. h. im vorliegenden Falle 0,18 und 0,16.

§. 5. Querschnitte der einfachen geraden Gespärre ohne Durchzüge; Taf. XIV. dargestellt. (Siehe Anhang Nr. 50.)

Ich setze gleich anfangs voraus, man wolle ein einfaches gerades Gespärre entwerfen, wie diejenigen sind, in welche man die Bögen einrahmt, und

verweise hinsichtlich der Art und Weise, in denen bei dieser Art von Gespärren Biegung und Bruch vor sich gehen, auf den §. 4 des Cap. VIII.

Nennt man P das ganze Gewicht, welches der Sparren trägt, A die halbe Weite des Gespärres, l die Breite und h die Dicke oder Höhe des Querschnitts, so reduciren sich die Formeln zur Berechnung des Querschnitts des Sparrens und des Pfostens auf folgende:

Neigung des Daches gegen den Horizont.	Winkel, den der Sparren mit der Verticale macht.	Formel zur Berechnung	
		des Sparrens.	des Pfostens.
2 Basis zu 1 Höhe . . .	63°	$lh^2 = 0{,}00000104\,PA$	$lh^2 = 0{,}00000226\,PA$
3 Basis zu 2 Höhe . . .	57	$lh^2 = 0{,}00000104\,PA$	$lh^2 = 0{,}00000202\,PA$
1 Basis zu 1 Höhe . . .	45	$lh^2 = 0{,}00000105\,PA$	$lh^2 = 0{,}00000163\,PA$

Ich will hier, eben so wie vorbin, eine theilweise empirisch gefundene, d. h. annähernd berechnete Tabelle geben, welche die Dimensionen des Querschnitts der Stücke eines einfachen geraden Gespärres enthält, wenn blofs die Spannweite desselben gegeben ist und welche als Leitfaden bei Anwendungen dienen kann. Ich nehme den Sparren auf 3 Basis zu 2 Höhe geneigt an und mit 200^k auf den laufenden Meter seiner Horizontal-Projection belastet.

Spannweite des Dachstuhls in Metern.	Querschnitt in Metern ausgedrückt:					
	Des Sparrens.		Jeder der Hälfte, des aus zwei Zangenhölzern gebildeten Pfostens.		Des Tragbandes und des Spannriegels.	
	Breite l.	Dicke h.	Breite l.	Dicke h.	Breite l.	Dicke h.
24	0,23 zu	0,33	0,125 zu	0,42	0,18 zu	0,18
22	0,22 -	0,32	0,125 -	0,39	0,18 -	0,18
20	0,21 -	0,31	0,125 -	0,38	0,16 -	0,16
18	0,20 -	0,30	0,125 -	0,38	0,16 -	0,16
16	0,19 -	0,29	0,125 -	0,36	0,14 -	0,14
14	0,19 -	0,28	0,125 -	0,35	0,12 -	0,12

§. 6. Querschnitte der zusammengesetzten geraden Gespärre von der Form wie die auf Taf. XXII. und XXV. dargestellten.

Zur Berechnung der Querschnitte der Theile der zusammengesetzten geraden Gespärre bediene man sich der Formeln des §. 5, und vertheile dann die für

den Sparren gefundene Dicke (Höhe) auf ihn selbst, und die Verstärkung in *M* (Taf. XXIV.), wo der Sparren, vermöge letzterer, die doppelte Dicke besitzt. Auf gleiche Weise wird man die für den Pfosten gefundene Dicke (Höhe), wenn dieser noch mit einer Stuhlsäule verbunden ist, auf beide Verbindungsstücke vertheilen, wobei dann letztere mit dem Sparren gleiche Breite erhält.

Tabelle der Querschnitte der zusammengesetzten geraden Gespärre von der Construction wie die auf Taf. XXII. und XXIV. dargestellten, dabei die Sparren auf 3 Basis und 2 Höhe geneigt, und mit 300k auf dem laufenden Meter ihrer Horizontal-Projection belastet.

Spannweite des Dachstuhls in Metern.	Querschnitt in Metern:											
	Des Sparrens.			Der Strehen (Untersparren) und Tragbänder.			Jedes der zwei Zangenhölzer, aus denen der Pfosten $A'B'$ besteht. (Taf. XXIV.)			Der Stuhlsäule (AB Taf. XXIV.)		
	Breite l.		Dicke h.	Breite l.		Dicke h.	Breite l.		Dicke h.	Breite l.		Dicke h.
24	0,20	zu	0,25	0,20	zu	0,20	0,125	zu	0,25	0,20	zu	0,25
22	0,20	-	0,22	0,20	-	0,20	0,125	-	0,22	0,20	-	0,25
20	0,20	-	0,20	0,20	-	0,20	0,125	-	0,20	0,20	-	0,25
18	0,15	-	0,20	0,15	-	0,20	0,125	-	0,18	0,15	-	0,15
16	0,15	-	0,18	0,15	-	0,15	0,120	-	0,16	0,15	-	0,15
14	0,15	-	0,15	0,15	-	0,15	0,120	-	0,15	0,15	-	0,15

Die bei der Zusammensetzung des Gespärres zu beobachtenden Vorsichtsmaafsregeln sind eben nicht sehr zahlreich und gehen darauf hinaus, solche Arten der Verbindung anzuwenden, durch welche die Hölzer nicht geschwächt werden. Ich glaube, dafs es am besten wäre, die Ueberschneidungen, wobei jedes Holz zur Hälfte ausgeschnitten wird, nur im äufsersten Nothfalle anzuwenden, und statt der Zapfen und Zapfenlöcher einfache Versatzungen, durch ein oder zwei starke Schraubbolzen gesichert, und über diese die Zangen gelegt, anzuwenden. Gut ist es auch, dünne Bleiplatten zwischen die Fugen zweier Hölzer zu bringen, die mit grofser Kraft gegen einander gedrückt werden, um jedes Ineinanderdrücken der Fasern des Holzes zu vermeiden.

§. 7. Beispiel der Berechnung der Querschnitte eines zusammengesetzten geraden Gespärres, wie das auf Taf. XXIV. gezeichnete.

Ich werde als Beispiel den Dachstuhl des Reithauses zu Pont à Mousson nehmen. Dies Gebäude hat 18m lichte Weite, ist mit Hohlziegeln von Lorraine gedeckt bei einer Neigung von 27° gegen den Horizont.

Das Gewicht des Quadratmeters Bedachung, in der Neigung des Daches gemessen, besteht aus:

1)	Funfzig feuchte Hohlziegel (∫ Ziegel, Pfannen, tuiles courbes) von Lorraine	90^k
2)	Ein Quadratmeter Fufsboden, von $0^m,027$ Dicke, mit den Nägeln . .	19^k
3)	Zwei laufende Meter Leersparren von $0^m,10$ zu $0^m,10$	14^k
	Total	123^k

Die Länge des Sparrens in der Ebene seiner Neigung gemessen, beträgt $10^m,75$; die Entfernung zweier Gespärre von Mitte zu Mitte ist $3^m,50$. Das Gewicht, welches ein halbes Gespärre trägt, ist also $10,75 . 3,50 . 123^k$	4628^k
Jedes halbe Gespärre hat nahe an $2^{m. cub.},50$ Inhalt; das zur Construction gebrauchte Tannenholz wiegt 600^k, mithin das Gewicht eines halben Gespärres beträgt	1500^k
Die Pfetten und Querbänder sind geschätzt zu	600^k
Total	6728^k

Man hat P in runden Zahlen zu 7000 Kilogrammen, und überdies ist $A = 9$ Metern. Der Querschnitt des Sparrens berechnet sich also nach der Formel:

$$lh^2 = 0,00000107 \times 9 \times 7000 = 0,06741.$$

Man hat $l = 0^m,20$ genommen und daraus $h = 0^m,58$ gefunden. Demnach wurde der Querschnitt des Sparrens selbst, zu $0^m,28$ Höhe und $0^m,20$ Breite genommen, und man begnügte sich, den Streben (Untersparren, sous-arbalétriers bei M) dieselben Dimensionen zu geben.

Die Formel für den Pfosten giebt:

$$lh^2 = 0,00000226 \times 7000 \times 9 = 0,14238.$$

Man hat die Breite jedes der beiden Zangenhölzer, aus denen der Pfosten besteht, zu $0^m,20$ genommen, also die gesammte Breite beider $l = 0^m,40$, woraus folgt $h = 0,5966 = 0^m,60$. Nach der im §. 6 dieses Cap. gegebenen Regel hat man jeder Zange des Pfostens $0^m,20$ Breite und $0^m,30 = \frac{h}{2}$ Dicke gegeben, dabei mufste also die Stuhlsäule die Dicke des Pfostens $= 0^m,30 = \frac{h}{2}$ und die Breite des Sparrens $= 0^m,20$ haben, also einen Querschnitt von $0^m,20$ zu $0^m,30$.

Dieser Dachstuhl wurde einer Probebelastung unterworfen, die, obgleich sie nicht sehr weit getrieben wurde, doch glauben läfst, dafs seine Querschnitte nicht blofs genügend, sondern selbst etwas stark waren. Er wurde mit 14668^k, also etwas über das Doppelte der Belastung beschwert, welche er tragen sollte. Diese beinahe gleichförmig auf die Sparren vertheilte Belastung brachte nur eine Senkung des Scheitels des Gespärres von $0^m,067$ hervor, der eine Pfosten wich um ungefähr $0^m,015$ nach auswärts, der andere blieb in verticaler Stellung.

Nach Wegnahme der Belastung nahm der Scheitel des Gespärres fast augenblicklich seine ursprüngliche Lage (bis nahe auf einen Centimeter) wieder an.

§. 8. Querschnitte der verschiedenen Theile der Dachstühle mit Bogengespärren.

Erinnert man sich, dafs in dem §. 4 Cap. VIII. das beste Verhältnifs zwischen dem Querschnitte des Sparrens und dem des Bogens angegeben ist, so wird die Projectirung eines Dachstuhls mit Bogengespärren keine Schwierigkeiten mehr darbieten. Der zu befolgende Weg kommt darauf hinaus, zuerst die Dimensionen des einfachen geraden Gespärres, §. 5, so zu berechnen, als wenn dieses ein Gewicht gleich der halben Totalbelastung des Bogengespärres tragen sollte, dann dem Bogen einen um ein Viertel gröfseren Querschnitt als dem Sparren zu geben, mit dem er übrigens von gleicher Breite ist.

Ich beschränke mich hier darauf, eine Tabelle über die Dimensionen der verschiedenen zur Construction eines Bogengespärres gehörigen Stücke zu geben, wobei ich die Neigung der Sparren zu 3 Basis auf 2 Höhe und eine Belastung von 400ᵏ auf den laufenden Meter ihrer Horizontal-Projection annehme.

Spannweite der Gespärre in Metern.	Querschnitt in Metern:					Senkung des Scheitels des Gespärres, in verticaler Richtung in Metern.	Horizontale Verschiebung des äufsersten oberen Endes des Pfostens, in Metern.
	Des Bogens.	Des Sparrens.	Eines der beiden Zangenhölzer, aus denen der Pfosten besteht.	Des Tragbandes und des Spannriegels.	Eines der beiden Hölzer der Hängesäule (Zange.)		
	Breite. Höhe.	Breite. Höhe.	Breite. Höhe.	Breite. Höhe.	Breite. Höhe.		
24	0,20 zu 0,40	0,20 zu 0,32	0,12 zu 0,41	0,16 zu 0,16	0,15 zu 0,12	0,04	0,020
22	0,20 – 0,37	0,20 – 0,30	0,12 – 0,35	0,16 – 0,16	0,15 – 0,12	0,03	0,015
20	0,20 – 0,33	0,20 – 0,28	0,12 – 0,32	0,16 – 0,16	0,15 – 0,10	0,03	0,015
18	0,15 – 0,35	0,15 – 0,28	0,12 – 0,30	0,12 – 0,12	0,15 – 0,10	0,03	0,015
16	0,15 – 0,35	0,15 – 0,26	0,12 – 0,27	0,12 – 0,12	0,12 – 0,08	0,02	0,010
14	0,15 – 0,27	0,15 – 0,22	0,12 – 0,25	0,10 – 0,10	0,12 – 0,08	0,02	0,010

Bemerkung. Man kann die Werthe in den beiden letzten Columnen verdoppeln, um die Senkung wegen des Zusammendrückens der Verbindungen zu berücksichtigen.

Die wesentlichste Vorsichtsmaafsregel, welche bei der Zusammensetzung der Bogengespärre zu beachten ist, besteht darin, die Bögen so zusammenzusetzen, dafs sie die gröfstmöglichste Steifigkeit haben, denn ihre Biegsamkeit ist wegen des daraus folgenden Schubes eine Ursache der Zerstörung des Gebäudes. Will man von den Bögen aus gebogenem Holze Gebrauch machen, so wende man die längsten und dicksten Schienen an, die man erhalten kann, spare nicht an eisernen Bändern und Schraubbolzen, vermeide bei zwei auf einander folgenden Schienen

Fugen an den Bruchstellen der äufseren und Fugen im Scheitel an der inneren Bogenfläche, und endlich vermehre man die Anzahl der Schienen an dem Punkte, wo die gröfste Biegung Statt findet, welcher bekanntlich vom Fufse an gerechnet im Drittel des halben Bogens liegt.

Bei der Anwendung der Bögen aus hochkantigen Bohlen, construire man nach Lacaze's Systeme, bediene sich starker Eichenbohlen und verstärke die Verbindungen mittelst Bänder und Schrauben. Zeigt der Bogen, wie er auch construirt sein möge, Biegsamkeit, so vereine man ihn mit den Sparren durch normal auf den Bogen gerichtete Zangen, weil diese Anordnung den Verbindungen mehr Festigkeit giebt und dadurch der gröfsere Theil der Belastung durch die Sparren getragen wird.

Besitzt der Bogen aber Steifheit und ist er solide construirt, so richte man die Zangen vertical, weil alsdann die Belastung sich fast gleichmäfsig auf Sparren und Bogen vertheilt, und überhaupt gleichmäfsiger über das ganze Gespärre verbreitet wird.

§. 9. Rechnungen bei der Anordnung der Bögen aus Holz und aus Eisen.

Um einen Bogen, der eine auf irgend eine Weise vertheilte Belastung tragen soll, zu entwerfen, mufs man kennen:

1) Den Querschnitt, welchen derselbe erhalten mufs, um den auf ihn wirkenden Kräften zu widerstehn.

2) Den Krümmungspfeil (Senkung des Scheitels in verticaler Richtung), den er durch Einwirkung der Belastung annehmen wird.

Die folgende Tabelle und die Formeln auf Seite 96 geben die Gröfse aller dieser Werthe; hier folge die Angabe der dort gebrauchten Bezeichnungen:

A ist der mittlere Halbmesser des Halbkreisbogens oder des gedrückten Bogens, X die halbe Sehne und Y der Pfeil (die Steigung) eines gedrückten Bogens, P ist die Gesammtbelastung, welche der ganze Bogen trägt, Q der Horizontalschub in der Ebene des Anfängers, f die verticale Senkung des Punktes, an dem die Last aufgehängt ist, oder die Senkung des Scheitels bei gleichförmiger Vertheilung der Last auf dem Bogen, a und b sind die Breite und Höhe des Querschnitts, wenn er rechtwinklig ist, r der Halbmesser desselben, wenn er kreisförmig, R' die gröfste zusammendrückende Kraft, die das Material, aus welchem der Bogen besteht, auf der Flächeneinheit ertragen kann, und E der Modul der specifischen Elasticität des in Frage stehenden Bogens oder der fraglichen Construction überhaupt. (Siehe §. 7 Cap. VII. und Nr. 45 bis 49 des Anhangs.)

Für Holzbögen ist . . . . $\begin{cases} R' = 300\,000^k \\ E = 500\,000\,000^k \end{cases}$

Für Bögen aus Gufs- oder Schmiede-Eisen $\begin{cases} R' = 5\,000\,000^k \\ E = 12\,000\,000\,000^k \end{cases}$

den Quadratmeter zur Flächeneinheit genommen.



Tabelle der Formeln zur Berechnung der halbkreisförmigen Bögen.

Art der Belastung.	Gröfse des Schubes in der Anfängerebene.	Senkung des Scheitels oder des Aufhängepunktes des Gewichts in Metern.	Querschnitt der Bögen in Metern: rechtwinkliger.	kreisförmiger.
Gleichförmig auf dem Umfange des Bogens vertheilt.	$0{,}16\,P$	$0{,}051\,\frac{PA^3}{Eab^3}$	$ab^2 = \frac{P}{R'}(0{,}599b + 0{,}27A)$	$r^3 = \frac{P}{R'}(0{,}124r + 0{,}062A)$
Gleichförmig in Bezug auf die Horizontale vertheilt.	$0{,}22\,P$	$0{,}084\,\frac{PA^3}{Eab^3}$	$ab^2 = \frac{P}{R'}(0{,}680b + 0{,}25A)$	$r^3 = \frac{P}{R'}(0{,}200r + 0{,}044A)$
Im Scheitel aufgehängt.	$0{,}32\,P$	$0{,}222\,\frac{PA^3}{Eab^3}$	$ab^2 = \frac{P}{R'}(0{,}597b + 0{,}55A)$	$r^3 = \frac{P}{R'}(0{,}200r + 0{,}212A)$
Ueber der Mitte des Halbmessers aufgehängt.	$0{,}28\,P$	$0{,}173\,\frac{PA^3}{Eab^3}$	$ab^2 = \frac{P}{R'}(0{,}597b + 0{,}55A)$	$r^3 = \frac{P}{R'}(0{,}200r + 0{,}212A)$

Formeln für die gedrückten Bögen. (Die Angabe der Bezeichnung auf der Seite 95.)

1) Bögen, deren Querschnitt ein volles Rechteck ist,

$$ab^2 = \frac{P}{2R'}\left(Mb + \frac{NA}{4}\right).$$

2) Bogen aus Röhren, deren Querschnitt von zwei Ellipsen begrenzt ist, deren halbe Axen in der Horizontale a und a' und in der Verticale b und b' sind

$$ab^3 - a'b'^3 = \frac{P}{2R'}\left(\frac{M(ab^3 - a'b'^3)}{3{,}1415(ab - a'b')} + \frac{NAb}{18{,}849}\right).$$

3) Der Horizontalschub gegen die Widerlager ist

$$Q = \frac{MP}{2}.$$

Tabelle der correspondirenden Werthe von $\frac{X}{Y}$, M und N.

$\frac{X}{Y}$	2,000,	3,000,	4,000,	5,000,	10,000,	15,000,	20,000,
M	1,080,	1,550,	2,040,	2,660,	6,660,	7,630,	9,520,
N	0,792,	0,263,	0,117,	0,053,	0,034,	0,022,	0,001.

Vielleicht ist nicht überflüssig hier daran zu erinnern, dafs zwischen X, Y und A die Gleichung Statt findet:

$$A = \frac{Y}{2}\left(\frac{X^2}{Y^2} + 1\right).$$

§. 10. Anwendung der zur Berechnung der gedrückten Bögen dienenden Formeln.

Die für die kreisförmigen Bögen entwickelten Formeln, können Anwendung finden bei der Construction von Brücken aus Holz oder Eisen, deren Oberbau durch Bögen getragen wird (Fig. 12 und 13 Taf. II.) oder an Bögen aufgehangen ist, die sich über der Fahrbahn erheben. (Fig. 14 Taf. II.) Als erstes Beispiel nehmen wir eine hölzerne Brücke, von der jedes Brückenfeld (zwischen zwei Pfeilern, travée) 150 000 Kilogramme wiegt, und von sieben Bögen, jeder von 24 Metern Oeffnung und 4 Metern Pfeil getragen wird. Nimmt man an, die Belastung vertheile sich gleichförmig über alle Bögen, so beträgt sie für jeden in runden Zahlen 21000^k, wofür man 24000 setzen kann, um die zufälligen Mehrbelastungen, die beim Hinüberfahren von Fuhrwerken vorkommen, mit in Rechnung zu bringen.

Man hat also

$$\frac{P}{2} = 12000, \qquad X = 12, \qquad Y = 4, \qquad \frac{X}{Y} = 3, \qquad A = 20,$$

und nach der Tabelle: $M = 1{,}55$, $N = 0{,}263$; nimmt man also $R' = 300000$ so wird die Formel:

$$ab^2 = \frac{12000}{300000}\,(1{,}55b + 1{,}315),$$

Der Schub ist $Q = \frac{MP}{2} = 1{,}55 \,.\, 12000 = 18600$ Kilogramme, was für alle sieben Bögen eine Pressung von 130 200^k in horizontaler Richtung in der Höhe des Anfängers gegen das Widerlager wirkend ausmacht, und da die Brücke 10^m breit ist, so erhält man 13 020^k für den laufenden Meter.

Die Höhe dieses Widerlagers will ich zu 10^m,25 über der Grundebene des Fundaments annehmen und den Angriffspunkt des Schubes 5^m,80 über der Basis. Das Moment des Schubes beträgt also für den laufenden Meter 5,80 . 13 020 = 75 516 und den Stabilitäts-Coefficienten zu 1,50 rechnend, wird dasselbe 113 274. Nennt man e die Dicke des Widerlagers, so wird unter Voraussetzung, der Cubikmeter Mauerwerk wiege 2 200^k, das Moment des Widerlagergewichts, auf einen Meter Länge gerechnet, sein:

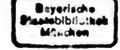
$$\frac{e^2}{2}\, 10{,}25 \,.\, 2\,200^k = e^2 \,.\, 11\,275^k.$$

Setzt man letzteres Moment dem Momente des Schubes gleich und löst für e auf, so findet man:

$$e = \sqrt{\frac{113274}{11275}} = 3^m{,}17.$$

Als zweites Beispiel nehme ich eine gufseiserne Brücke, wobei jede Oeffnung 48^m Weite und 4^m,90 Pfeil besitzt. Jeder Bogen trägt im Ganzen 50 000^k, den Brückenbelag mit inbegriffen. Der Bogen ist aus einer Röhre von elliptischem Querschnitte hergestellt.

Hier ist also $\frac{P}{2} = 25\,000^k$, $\quad X = 24$, $\quad Y = 4{,}90$, $\quad \frac{X}{Y} = 4{,}89$ oder 5,





und demnach $M = 2{,}66$, $N = 0{,}053$, $A = 61^m{,}00$ (siehe Seite 96 unten); man erhält $R' = 5\,000\,000$ gesetzt, daher:

$$ab^3 - a'b'^3 = \frac{25000}{5000000}\left(\frac{2{,}66\,(ab^3 - a'b'^3)}{3{,}1415\,(ab - a'b')} + \frac{0{,}053\,.\,61^m}{18{,}849}\,.\,b\right).$$

Diese Formel enthält drei unbekannte Gröfsen, von denen man zwei, nämlich die Stärke des Gusses und die äufseren halben Durchmesser a und b, beliebig annehmen kann. Ich will voraussetzen, die Gufsstärke variire an verschiedenen Punkten des Umfanges in der Weise, dafs man hätte:

$$a' = \tfrac{8}{9}\,a, \quad b' = \tfrac{8}{9}\,b, \quad \text{also} \quad a'b' = 0{,}79\,ab \quad \text{und} \quad a'b'^3 = 0{,}624\,ab^3.$$

Durch Substitution dieser Werthe reducirt sich die Formel auf:

$$ab^2 = 0{,}0042b + 0{,}023\,.$$

Ich nehme $a = 0^m{,}20$ und erhalte dann $b = 0^m{,}34$.

Die Höhe des Bogens wird also $0^m{,}68$, und sein horizontaler Durchmesser $0^m{,}40$ betragen. Die Stärke des Gusses wird zwischen $0^m{,}022$ und $0^m{,}038$ variiren. Zieht man aber vor, dem Gusse eine constante Dicke zu geben, so kann man diese zu $0^m{,}03$ annehmen.

Ende der Abhandlung.

Anhang

zu der Abhandlung über

Sprengwerke von grosser Spannweite.

Theorie der Biegung prismatischer Körper, deren mittlere (neutrale) Axe eine Gerade oder eine ebene Curve ist.

1) Wir setzen hier die allgemeinen Angaben und Definitionen, Cap. VI. §. 2 der Abhandlung, ferner die Kenntnifs des Elasticitäts-Coefficienten E, des Bruch-Coefficienten R und der Grenze der dauernden Belastungen R' als bekannt voraus. Dagegen werden wir uns mit der Aufsuchung der analytischen Relationen beschäftigen, durch welche man in den Stand gesetzt wird:

a) *Die Horizontal- und Vertical-Verschiebungen zu berechnen, welche irgend ein Punkt eines prismatischen Körpers erleidet,* wenn man die Dimensionen dieses Körpers, Intensität, Richtung und den Angriffspunkt der einwirkenden Kräfte kennt.

b) *Den Querschnitt eines prismatischen Körpers zu bestimmen, damit derselbe während gehörig langer Zeitdauer einwirkenden Kräften widersteht,* wenn man blofs die Länge des Prismas, die Gestalt seiner Axe und die Kräfte kennt, welchen er unterworfen ist.

2) *Die in tangentialer Richtung zu der Curve der mittleren Axe angreifenden Kräfte drücken die Fasern zusammen oder verlängern diese nach ihrer Längenrichtung und tragen zur Biegung Nichts bei.* Vorerst ist hier eine nothwendige

Bemerkung zu machen, die sich auf die Wirkung der äufseren Kräfte bezieht, welchen der prismatische Körper unterworfen ist.

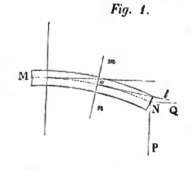
Es können diese Kräfte parallel zu der mittleren Axe, oder normal oder schief zu dieser gerichtet sein. Sind sie schief gerichtet, so kann man immer, welchen Punkt der Axe man auch betrachten mag, die auf ihn wirkenden Kräfte in zwei Composanten zerlegen, von denen die eine parallel zur Richtung der Fasern, die andere normal auf der Tangente an diesem Punkte ist.

Die erste dieser Kräfte kann nur Zusammendrückung hervorbringen, und es werden sich Molecular-Kräfte entwickeln, die ihr das Gleichgewicht halten; die zweite allein wird Biegung bewirken, und zwar so, dafs, wie auch immer die Richtung der Resultante der äufseren Kräfte sei, die vermöge der Biegung entwickelten Molecular-Kräfte immer nur den senkrecht auf die Richtung der Fasern wirkenden Kräften Gleichgewicht zu halten haben.

Die Zusammendrückungen, welche durch Composanten verursacht werden, die parallel zur Tangente an der mittleren Axe wirken, sind zu unbedeutend, die ursprüngliche Form des Körpers merklich zu ändern, wenigstens so lange nicht, als diese Kräfte nicht die für den früher angegebenen Werth von R' (§. 2 Cap. VI. der Abhandlung) bemerkten Grenzen überschreiten.

Wir werden daher in dem Folgenden von den durch die tangentialen Kräfte bewirkten Verkürzungen abstrahiren und uns darauf beschränken, Formänderungen zu betrachten, welche durch die Biegung, vermöge der normal auf den Fasern wirkenden Kräfte, hervorgebracht sind. Indefs mufs wohl verstanden werden, dafs, sobald es sich darum handeln wird, die Dimensionen eines prismatischen Körpers zu berechnen, welcher den auf ihn einwirkenden Kräften gehörig widerstehen soll, wir Zusammendrückungen jeder Art mit in Rechnung ziehen werden, die er durch diese Kräfte erfährt.

Fig. 1.



3) *Gleichgewichts-Bedingungen zwischen den Molecularkräften und den äufseren Kräften, welche Biegung zu bewirken streben.*

Betrachten wir zuerst ein solides Prisma MN (Fig. 1), dessen mittlere Axe eine Gerade oder ein Kreisbogen oder allgemein eine ebene Curve ist, und setzen voraus, dasselbe sei 1) an seinem Ende M eingemauert, und zwar so, dafs während der Biegung die Tangente an der mittleren Axe in M beständig horizontal bleibe, 2) veranlafst sich zu biegen, durch auf irgend eine Weise zwischen M und N verbreitete Gewichte, deren Gröfse pr. Längeneinheit $=p$ ist und durch zwei respectiv verticale und horizontale Kräfte P und Q die an dem äufsersten Ende N der mittleren Axe angreifen.

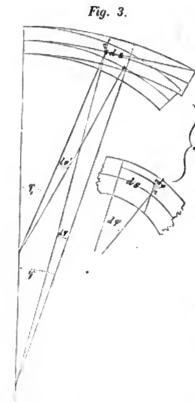
Fig. 2.

Es sei amn (Fig. 2) die Fläche irgend eines Querschnittes mn, welcher entsteht, wenn man durch o (Fig. 1) nach der Richtung mn eine auf der mittlern Axe normale Schnittebene führt, und aa' (Fig. 2) sei die Trace der Cylinderfläche der neutralen Fasern in dieser Ebene. Soll der Theil oN (Fig 1) des Prismas sich im Gleichgewichte befinden, so müssen die in dem Schnitte mn des Prismas (Fig. 1) entwickelten Molecularkräfte, der auf die Tangente in dem Punkte o der mittleren Axe normalen Composante aller von o bis N angreifenden äufseren Kräfte, das Gleichgewicht halten, und demgemäfs: 1) müssen durch die Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern in diesem Querschnitte sich normal zur Tangente ot (Fig. 1) wirkende Kräfte erzeugen, deren Summe gleich der Composante der ebenfalls normal zur Tangente wirkenden äufseren Kräfte ist; 2) mufs die Summe der mit der Tangente ot parallelen Kräfte, welche durch die Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern vermöge der Biegung auftreten, gleich Null sein, weil die Wirkung der zur Tangente ot parallelen Composante der äufseren Kräfte darin besteht, andere Zusammendrückungen zu erzeugen, die ihr das Gleichgewicht halten und die zur Biegung nichts beitragen; 3) mufs die Summe der Momente der Molecularkräfte auf die Axe aa' der unveränderlichen Faserschicht bezogen, gleich der Summe der Momente der äufseren Kräfte auf eben dieselbe Axe bezogen sein.

Untersuchen wir zuerst die Beschaffenheit dieser Molecularkräfte, indem wir folgende Hypothesen machen: 1) die Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern sind dem Abstande jeder dieser Fasern von der neutralen Axe und der Gröfse des Contingenzwinkels direct proportional; 2) die Molecular-Widerstände sind ebenfalls den Verlängerungen oder Verkürzungen der Fasern, dem Querschnitte derselben und dem Elasticitäts-Modul direct proportional.

Beziehen wir jetzt die verschiedenen Punkte des Querschnitts $ma'na$ auf die Axe aa' als Axe der Abscissen u und auf eine Normale aV auf der Axe aa' als Axe der Ordinaten v, so ist der Querschnitt einer in dem Abstande v von der Axe aa' sich befindenden Faser gleich $du\,dv$.

Fig. 3.



Bezeichnen sodann

E den Elasticitäts-Coefficienten des Materials des Prismas, φ und φ' die Winkel, welchen die Normalen des Punktes der mittleren Axe vor und nach der Biegung mit der Verticale machen (Fig. 3), s die unveränderliche Länge der Curve MN, ds einen unendlich kleinen Theil dieser Curve, so wird die Länge der im Abstande v von der mittleren Axe gelegenen Faser sein: vor der Biegung

$$ds + vd\varphi,$$

und nach der Biegung:

$$ds + vd\varphi',$$

so dafs die Verlängerung, welche diese Faser durch die Biegung erfährt, auf die Längeneinheit:

$$v \cdot \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds + vd\varphi}$$

beträgt, und sie demgemäfs der Biegung in der Richtung der Tangente ot einen Widerstaud entgegen setzt der gleich ist:

$$E \cdot \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds + vd\varphi} \cdot v \cdot dudv$$

welcher Werth, wenn man $vd\varphi$ gegen ds vernachlässigt, zu

$$E \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} \cdot v \cdot dudv$$

sich umgestalten läfst.

Bezeichnet man also mit a den gröfsten Werth von u, mit b und b' die Functionen von u, durch welche die Ordinaten des Umfangs des normalen Querschnitts $ma'na$ ausgedrückt werden, die ersteren auf der Seite der neutralen Axe wo Verlängerungen der Fasern, die zweiten auf der Seite derselben wo Verkürzungen dieser Statt finden, so ergiebt sich die Summe der Widerstände der ausgedehnten und zusammengedrückten Fasern zu:

$$E \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} \left(\int_0^a du \int_0^b vdv + \int_0^a du \int_0^{b'} vdv \right).$$

Nach Nr. 2 mufs jedoch diese Summe gleich Null sein, so dafs man erhält:

$$\int_0^a du \int_0^b vdv + \int_0^a du \int_0^{b_,} vdv = 0.$$

Diese Bedingung zeigt, dafs die Axe aa' eine der Hauptaxen des Querschnitts $ma'na$ ist; sie geht also durch den Schwerpunkt dieses Querschnitts, wodurch ihre Lage bestimmt ist.

4) *Definition des Elasticitäts-Moments des Querschnitts eines Körpers.* Die Summe der Momente der parallel mit der Tangente ot wirkenden Molecularkräfte, bezogen auf die Axe aa' wird sein

$$E\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}\left(\int_0^a du\int_0^b v^2dv+\int_0^a du\int_0^{b'} v^2dv\right);$$

wobei der in der Klammer befindliche Theil nichts Anderes ist als das Trägheitsmoment der Querschnittsoberfläche *ma'na* auf die Axe *aa'* bezogen. Ist der Körper prismatisch, so ist das Product

$$E\left(\int_0^a du\int_0^b v^2dv+\int_0^a du\int_0^{b,} v^2dv\right)$$

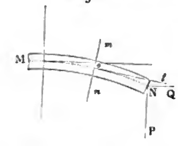
eine constante Gröfse für jeden beliebigen Querschnitt des in Frage stehenden Körpers und dies Product, welches wir durch ε bezeichnen wollen, nennt man (uneigentlich): *Elasticitäts-Moment* des normalen Querschnitts des Körpers.

Der Ausdruck für die Summe der Momente der mit der Tangente *ot* parallel gerichteten Molecularkräfte ist also einfach

$$\varepsilon\,.\,\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}\,.$$

Die Summe der Momente der normal zur Tangente *ot* gerichteten Molecularkräfte vernachlässigen wir, weil wir die Biegung immer als gering und die Länge des Prismas, verglichen mit seiner Höhe, als bedeutend voraussetzen, und dann leicht einzusehen ist, dafs die Summe der Momente der in der Ebene *ma'na* wirkenden Molecularkräfte sehr klein ist, verglichen mit der Momenten-Summe der in normaler Richtung zu dieser Ebene wirkenden Kräfte.

Fig. 1.



5) *Allgemeine Gleichungen für das Gleichgewicht eines durch äufsere Kräfte gebogenen Körpers.* Es seien x und y die Coordinaten des Punktes o in der mittleren Axe, M als Anfangspunkt derselben genommen, u die Abscisse eines beliebig zwischen o und N in derselben Axe angenommenen Punktes; X und Y die Coordinaten des Punktes N als äufsersten Punktes der mittleren Axe, ebenfalls auf den Ursprung M bezogen; die Abscissen mögen in horizontaler, die Ordinaten in verticaler Richtung angenommen werden. Sodann ist die Summe der Momente der äufseren Kräfte auf die neutrale Axe bezogen, deren Projection o (Fig. 1) im Schnitte *mn* ist:

$$\varepsilon\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=P(X-x)+Q(Y-y)+\int_{u=X}^{u=X}p(u-x)\,ds\,.$$

Ist der betrachtete Körper ein gerades rechtwinkliges Prisma, so wird sowohl φ als auch $d\varphi$ gleich Null sein, und bezeichnet man den Krümmungshalbmesser des Punktes O der mittleren Längenaxe nach der Biegung mit r, so wird man setzen können:

$$\frac{d\varphi'}{ds}=\frac{1}{r}\,,\qquad\text{denn}\quad r\,d\varphi'=ds\,,$$

oder wenn man den bekannten Werth des Krümmungshalbmessers substituirt:

$$\frac{d\varphi'}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil jedoch bei praktischen Constructionen die Biegung der Hölzer nur sehr gering sein darf, wird $\frac{dy}{dx}$ immer klein genug sein, um sein Quadrat vernachlässigen zu können, wefshalb wir schreiben:

$$\frac{d\varphi'}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Für diesen Fall wird dann die Gleichgewichtsbedingung, weil $ds = du$ ist

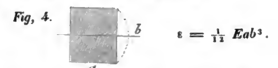
$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(X - x) + Q(Y - y) + \int_{u=x}^{u=X} p(u - x)\,du.$$

6) *Ausdrücke für die Elasticitäts-Momente verschiedener Querschnittsformen der bei Constructionen angewandten prismatischen Körper.* Weil die Bestimmungen des Werthes des Elasticitäts-Coefficienten ε darauf beruht, den Elasticitäts-Modul E des Materials mit dem Trägheitsmomente des Querschnitts des Prismas auf eine horizontale Axe, durch den Schwerpunkt bezogen, zu multipliciren, so sieht man, dafs diese Bestimmung eine Aufgabe der rationellen Mechanik ist. Das specielle Eingehen in die Berechnung dieser Werthe, würde die Theorie der Biegung prismatischer Körper unnützer Weise ausdehnen, zumal wenn man sie für besondere Fälle vornehmen wollte, z. B. wenn der Querschnitt ein Rechteck, ein Kreis oder irgend eine andere Figur ist. Wir wollen daher diese schon berechneten Werthe hersetzen, und verweisen für die Details der Rechnung auf Persy's Cours über Stabilität der Constructionen. (Cours de M. Persy sur la stabilité des constructions, quatrième édition, juillet 1834, lithographie de l'école d'Application de l'artillerie et du génie à Metz, pag. 79 et suivantes), wo die Theorie der Axen und Elasticitäts-Momente vollständig abgehandelt ist *).

7) Für ein Rechteck, dessen Basis a und Höhe b ist, hat man

1) unter Voraussetzung, das Prisma befinde sich in einer Lage, dafs seine Basis a horizontal liegt (Fig. 4)

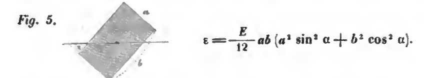
Fig. 4.



$$\varepsilon = \tfrac{1}{12} Eab^3.$$

2) Wenn die Seite a mit dem Horizont einen Winkel α macht: (Fig. 5)

Fig. 5.



$$\varepsilon = \frac{E}{12} ab\,(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha).$$

*) Auch in Rühlmann's Geodynamik, 2te Auflage, Artikel: Trägheitsmoment.

8) Für ein Quadrat, wo $a = b$ ist, was für eine Lage auch immer das Prisma habe und welchen Winkel auch die Seiten des Prismas mit der Horizontale machen mögen, hat man:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12} E a^4 .$$

9) Für eine Kreisfläche vom Halbmesser r, wenn π das Verhältnifs des Umfanges zum Durchmesser bezeichnet, hat man

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4} E \pi r^4 .$$

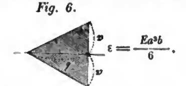
10) Für eine Ellipse, deren eine halbe Axe a horizontal und die andere halbe Axe b vertical, erhält man

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4} E \pi a b^3 .$$

11) Für ein Dreieck, welches in zwei andere rechtwinklige Dreiecke, deren Basis b und deren Höhe a ist, zerlegt werden kann, hat man:

1) wenn die Seiten a vertical sind (Fig. 6)

Fig. 6.



$$\varepsilon = \frac{E a^3 b}{6} .$$

2) Wenn die Höhe b vertical ist (Fig. 7):

Fig. 7.

b
a a

$$\varepsilon = \frac{E a b^3}{18} .$$

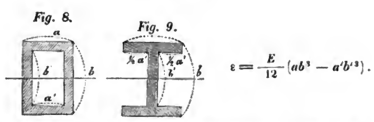
12) Das Trägheitsmoment eines Röhren-Querschnitts ist die Differenz der Momente zweier concentrischer Kreisflächen, und wenn r' und r'' den äufseren und inneren Halbmesser der Röhre bezeichnen, so ist das Moment:

$$\varepsilon = E \frac{\pi (r'^4 - r''^4)}{4} .$$

Das Moment einer elliptischen Röhre, deren horizontale äufsere und innere halbe Axen a und a', und deren verticale äufsere und innere halbe Axen b und b' sind, wird man erhalten zu:

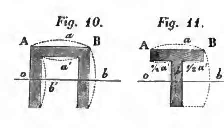
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4} E \pi (ab - a'b'^3) .$$

13) Wenn die Querschnitts-Figur ein viereckiger Rahmen oder ein an beiden Seiten ausgeschnittenes Rechteck ist, erhält man, wenn b die äufsere Höhe, b' die innere Höhe, a die äufsere Breite, a' die gesammte Breite der aus dem Rechteck fortgenommenen Theile bezeichnen, für die in Fig. 8 und 9 angegebenen Lagen:



$$\varepsilon = \frac{E}{12}(ab^3 - a'b'^3).$$

14) Der Ausdruck für ε wird etwas complicirter, wenn anstatt die ganzen Querschnitte (Fig. 8 und 9) zu betrachten, man blofs ihre Hälften nimmt, wie sie in Fig. 10 und 11 dargestellt sind.



Nennt man durchweg b und a die äufsere Höhe und Breite, b' und a' die gesammte Höhe und Breite der aus dem Rechteck ab fortgenommenen Theile, so findet man, dafs die neutrale Axe in der Entfernung Ao von der oberen Kante AB sich befindet, und zwar dafs

$$Ao = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-a')b^2 + a'(b-b')^2}{(a-a')b + a'(b-b')};$$

bezeichnet man diese Entfernung Ao mit γ, so hat man endlich:

$$\varepsilon = \frac{E}{3}\left[a\gamma^3 - a'(\gamma + b' - b)^3 + (a-a')(b-\gamma)^3\right].$$

Von dem Widerstande elastischer, faseriger Körper gegen Bruch, wenn eine Kraft rechtwinklig auf die Länge der Körper wirkt.

Um zu den Formeln für den Widerstand faseriger Körper gegen Bruch zu kommen, müssen wir annehmen, dafs die Erscheinungen bei der Biegung, wie wir sie (§. 2 Cap. VI. der Abhandlung) beschrieben haben, so lange in derselben Art und Weise continuirlich von Statten gehen, bis die von der neutralen Axe entferntesten Fasern an der Oberfläche des Körpers das Maximum der Spannung oder Zusammendrückung erfahren, welches sie überhaupt zu ertragen im Stande sind.

15) *Formeln für den Gleichgewichtszustand eines Körpers im Augenblicke des Bruchs; Bruchmoment eines Körpers.*

Es sei R der Bruch-Coefficient oder das Gewicht wodurch ein Prisma zerrissen wird, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, so ist der Widerstand einer Faser, die zerrissen wird, augenscheinlich $Rdudv$, und diesen Widerstand zeigen auch die Fasern an der convexen oder concaven Oberfläche des Prismas im Augenblicke des Bruchs.

Der Widerstand der anderen Fasern aber in demselben Augenblicke wird dem Grade der Verkürzung oder der Verlängerung, welche sie erfahren und demgemäfs ihrem Abstande von der neutralen Axe proportional sein.

Den Abstand der von der neutralen Axe entferntesten Faser sei V, und v der Abstand irgend einer beliebigen Faser von derselben Axe, so wird der Widerstand dieser letzten Faser sein:

$$\frac{Rvdudv}{V},$$

und demgemäfs der Gesammtwiderstand des Querschnitts mn des Körpers (Fig. 1) gleich:

$$\frac{R}{V}\int_0^a du \int_0^b v dv + \frac{R}{V}\int_0^a du \int_0^{b'} v dv.$$

ferner die Summe der Momente der Widerstände gleich:

$$\frac{R}{V}\int_0^a du \int_0^b v^2 dv + \frac{R}{V}\int_0^a du \int_0^{b'} v dv.$$

Man sieht, dafs dieser Werth für ein und dasselbe Prisma constant ist, welchen Querschnitt desselben man auch betrachten möge. Wir bezeichnen ihn mit ϱ und nennen ihn *Bruch-Moment.*

Nennt man die Coordinaten des Schwerpunkts o des Querschnitts, in welchem der Bruch erfolgt x_1 und y_1, und behält übrigens die in Nr. 5 angenommenen Bezeichnungen bei, so findet man als Gleichgewichts-Gleichung für den Bruch:

$$\varrho = P(X - x_1) + Q(Y - y_1) + \int_{u=x}^{u=X} p(u - x_1)\,ds,$$

wobei x_1 und y_1 so genommen werden müssen, dafs das Moment der äufseren Kräfte auf den Punkt o bezogen ein Maximum sei.

16) *Ausdruck für das Bruch-Moment.* Der Coefficient ϱ kann aus dem Coefficienten ε abgeleitet werden, indem man statt des Elasticitäts-Modul E den Bruchmodul R setzt und diesen letzteren durch die Ordinate V der von der neutralen Axe am entferntesten liegenden Faser dividirt. So zum Beispiel ist das *Elasticitäts-Moment* eines Rechtecks $\frac{1}{12}Eab^3$, sein *Bruch-Moment* $\frac{1}{6}Rab^2$. Das *Elasticitäts-Moment* einer Kreisfläche ist $\frac{1}{4}E\pi r^4$, ihr Bruch-Moment $\frac{1}{4}R\pi r^3$, und eben so in den übrigen Fällen. (Siehe Nr. 7 bis 14.) Man verwechsle indessen nicht V mit der Hälfte der gröfsten Dimension des Querschnitts des Körpers, denn z. B. für ein auf eine Kante gestelltes Prisma war das Elasticitäts-Moment

$$\varepsilon = \frac{E}{12}ab(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha).$$

Um das Bruch-Moment zu erhalten, mufs man nicht durch $\frac{b}{2}$ sondern durch $\frac{1}{2}b(\sin\alpha + \cos\alpha)$ als den wirklichen Werth von V für diesen speciellen Fall dividiren, und dann findet man

$$Q = \frac{R}{6} \cdot \frac{a(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

17) *Berechnung der Querschnitts-Dimensionen prismatischer Körper, welche Kräften ausgesetzt sind, die sie zu biegen oder zu zerreifsen (oder auch zu zerdrücken) streben.*

Betrachten wir zuerst einen prismatischen Körper, dessen Länge im Vergleich zu den Dimensionen seines Querschnitts sehr grofs ist, und der aus ausdehnsamen und zusammendrückbaren Fasern bestehend, durch schief zu seiner Länge gerichtete Kräfte gebogen wird. Welchen Punkt der mittleren Axe man auch wähle, so lassen sich die äufseren Kräfte immer auf zwei Kräfte zurückführen, von denen die eine parallel zur Tangente an der mitteren Axe, die andere normal auf diese Axe gerichtet ist.

Es sei:

T die tangentiale Kraft, Ω der Querschnitt des Prismas, E der Elasticitäts-Modul, R' die gröfste zusammendrückende Kraft, der man die Flächeneinheit des Querschnitts des Körpers, dessen Dimensionen man zu berechnen wünscht, aussetzen will. (§. 2 Cap. VI.)

Die Kraft T wird auf jede Flächeneinheit des Querschnitts des Prismas einen Druck gleich $\frac{T}{\Omega}$ ausüben, wodurch eine Verkürzung für die Längeneinheit der Fasern des Prismas gleich $\frac{T}{E\Omega}$ hervorgebracht werden wird. (§. 2 Cap. VI.)

Die am meisten durch die Biegung zusammengedrückte Faser ist die an der Oberfläche des Körpers, in dem Abstande V von der neutralen Axe gelegene, und ihre Verkürzung ist für die Längeneinheit $V\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ (Nr. 3); da sie gleichfalls der Kraft T ausgesetzt ist, so wird ihre gesammte Verkürzung auf die Längeneinheit:

$$\frac{T}{E\Omega} + V\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$$

betragen.

Andrerseits ist die durch die Kraft R' bei den Fasern desselben Körpers bewirkte Verkürzung für die Längeneinheit $\frac{R'}{E}$, und nach der früheren Hypothese ist diese Verkürzung das Maximum von der, welche die Fasern des Körpers erleiden sollen; man kann also setzen

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\Omega} + V\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}, \qquad \text{(A)}$$

welche Gleichung eine Function der beiden Dimensionen des Querschnitts des Prismas werden wird, wenn man in dieselbe für $V\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ seinen aus der Gleichgewichtsbedingung in Nr. 5 für den Widerstand gegen Biegung zu findenden

Werth substituirt und für x und y die Werthe setzt, welche $V\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ zu einem Maximum machen.

Betrachtet man gerade prismatische Körper mit rechtwinkligem Querschnitte, so reducirt sich $V\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ auf $V\frac{d^2y}{dx^2}$ (Nr. 5), und die Gleichung zur Berechnung des Querschnitts ist dann:

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\Omega} + V\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Wir wollen diese allgemeinen Bemerkungen mit der Anführung zweier Tabellen schliefsen, die von Navier angegeben, für diejenigen, welche von der eben aus einander gesetzten Theorie Gebrauch machen wollen, von Nutzen sein können. Im Cap. IX. der Abhandlung sind einige derartige Anwendungen ganz durchgeführt und auf die Anordnung der Dachgerüste und Brücken von Holz und von Eisen ausgedehnt worden.

Die Werke von Navier, Leçons sur l'application de la mécanique à la stabilité des constructions; von Poncelet, Introduction à la mécanique industrielle, deuxième édition, und von Morin, Aide-Mémoire de mécanique pratique, enthalten viel ausgedehntere und detaillirte Tabellen der Art; wir haben uns hier darauf beschränkt die unentbehrlichsten Zahlenwerthe anzugeben.

18) *I. Tabelle des Widerstandes der Körper gegen Ausdehnung oder Zusammendrückung und den daraus entstehenden Bruch.* (Den Quadrat-Centimeter als Flächeneinheit genommen.)

Angabe des Materials.	E oder Elasticitäts-Modul.	R oder Modul des Widerstandes gegen Bruch.	R' oder Grenze der dauernden Belastung für die Flächeneinheit.	
	k	k	k	
Eichenholz	120 000	600	50 bis 70	
Tannenholz	130 000	800	60 bis 80	
Drathseile (aus Eisen)	1 800 000	3 000	600 bis 1000	nach der Qualität.
Schmiedeisen von über $0^m,06$ Seite	1 800 000	4 000	400 bis 800	
Schmiedeisen von unter $0^m,06$ Seite	2 000 000	6 000	600 bis 1000	
Graues Gufseisen, keinen Stöfsen ausgesetzt	1 200 000	1 250	750 bis 1000	

19) *II. Tabelle über den Widerstand von Holz und Eisen gegen Zerdrückung.*
(Den Quadrat-Centimeter zur Flächeneinheit genommen.)

Angabe des Materials.	Gewicht des Cubik-Meters.	Gewicht, welches einen Würfel von 0,01 Seite zerdrückt.	Grenze der dauernden Belastung auf den Quadratcentimeter Querschnitt, wenn das Verhältnifs der Höhe zur kleinsten Seite der Grundfläche (des Querschnitts) ist:				
			unter 12.	12.	24.	48.	60.
Starkes Eichenholz .	k 980	k 300	k 30,00	k 25,00	k 15,00	k 5,00	k 2,50
Schwaches Eichenholz	900	190	19,00	8,40	5,60	-	-
Gelb- oder Rothtanne	671	375	37,50	31,00	18,70	7,50	-
Weifstanne.	550	97	9,70	8,20	4,90	-	-
Schmiedeisen	7 783	4 900	1000,00	835,00	500,00	167,00	84,00
Gufseisen	7 202	10 000	2000,00	1670,00	1000,00	333,00	167,00

20) Nach unseren eignen Versuchen fügen wir den vorhergehenden Tabellen die folgende, über die Elasticitäts- und Bruch-Coefficienten und die Grenze der bleibenden Belastung, für aus mehren Stücken zusammengesetzte Constructionen, hinzu.

III. Tabelle etc., Körper betreffend, welche aus Theilen zusammengesetzt sind.
(Den Quadrat-Centimeter zur Einheit genommen.)

Art der Zusammensetzung.	Natur des Materials.	Elasticitäts-Coefficient.	Bruch-Coefficient.	Grenze der dauernden Belastungen.
Gerade Hölzer, aus durch Verschränkung oder Verzahnung (par entailles ou cremaillères) verbundenen Theilen bestehend.	Eichen- oder Tannenholz.	96 000	400	k 40
Bögen aus hochkantigen Bohlen oder aus gebogenem Holze.	Eichen- oder Tannenholz.	50 000	300	30
Bögen oder zusammengesetzte Stucke. (pieces d'assemblage.)	Schmiedeisen oder graues Gufseisen.	1 400 000	4 200	420

Anwendung der Theorie des Widerstandes fester Körper auf die Anordnung von Holz- und Eisen-Constructionen.

21) Betrachten wir wieder die allgemeine Gleichung für das Gleichgewicht eines geraden Prismas, welches am einen Ende eingemauert, am anderen durch zwei verticale und horizontale Kräfte P und Q in Anspruch genommen, zugleich in irgend einer Weise auf seiner Länge verbreitete Gewichte trägt. Wir erhalten sodann, die früheren Bezeichnungen beibehaltend:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(X-x) + Q(Y-y) + \int_{u=x}^{u=X} p(u-x)\,du.$$

Fig. 12.

22) *Horizontales Prisma der Wirkung zweier Kräfte ausgesetzt, deren eine horizontal, die andere vertical gerichtet ist* (Fig. 12.) Wir wollen hier ein mit einem seiner Enden eingemauertes und am anderen einer verticalen Kraft P und einer horizontalen Kraft Q, die es ausdehnen oder zusammendrücken kann, ausgesetztes Prisma betrachten.

Erster Fall. *Wo die horizontale Kraft auf Zusammendrückung wirkt.* — Behält man die in Nr. 5 gewählten Bezeichnungen bei, und nennt überdies f den Pfeil der (gröfsten) Krümmung, welche das Prisma im Augenblicke annimmt, wo Gleichgewicht eingetreten ist, so hat man als Gleichgewichtsgleichung:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(X-x) + Q(f-y).$$

Zur Abkürzung setzen wir: $\frac{P}{\varepsilon} = p^2$; $\frac{Q}{\varepsilon} = q^2$; $X - x = x'$; $f - y = y'$;

und dann wird die letzte Gleichung:

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} + q^2y' + p^2x' = o,$$

deren vollständiges Integral:

$$y' = \frac{1}{q}\left(C\cos qx' + C'\sin qx' - \frac{p^2}{q}x'\right) \text{*)}$$

ist, woraus man erhält

$$\frac{dy'}{dx'} = -C\sin qx' + C'\cos qx' - \frac{p^2}{q^2}.$$

---

*) Für manche unsrer Leser dürfte es nicht unangemessen sein, die Integration dieser Differentialgleichung der zweiten Ordnung hier auszuführen.

Es ist: (1) $\frac{d^2y'}{dx'^2} = -q^2y - p^2x.$

Wir setzen

(2) $q^2y' + p^2x' = z,$

und finden dann

$$q^2\frac{dy'}{dx'} + p^2 = \frac{dz}{dx'},$$

Bemerkt man aber, dafs für $x = X$ man $y = f$, oder was dasselbe ist, für $x' = o$ man $y' = o$ erhält, dafs ferner für $x' = X$, $y' = f$ man $\frac{dy'}{dx'} = o$ bekommt, so findet man durch Substitution dieser Werthe:

---

und ferner:

$$q^2 \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}, \quad \text{also (3)} \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{q^2} \frac{d^2z}{dx'^2}$$

Daher, wenn man (2) und (3) in (1) substituirt

$$\frac{1}{q^2} \frac{d^2z}{dx'^2} = -z,$$

und auf beiden Seiten mit $2dz$ multiplicirt:

$$2 \frac{d^2z}{dx'^2} . dz = -2q^2zdz. \quad \text{d. i.}$$

$$d\left(\frac{dz^2}{dx'^2}\right) = -2q^2zdz,$$

und hieraus durch Integration:

$$\frac{dz^2}{dx'^2} = -q^2z^2 + \text{Const.}$$

Für $\frac{dz}{dx'} = o$ werde $z = \sqrt{A}$, so erhält man:

$$\frac{dz^2}{dx'^2} = q^2(A - z^2),$$

und hieraus durch Wurzelextraction:

$$\frac{dz}{\sqrt{A - z^2}} = qdx',$$

und integrirt:

$$arc\left(\sin = \frac{z}{\sqrt{A}}\right) = (x' + B)q,$$

wo B die mit in die Klammer gebrachte Constante ist; hieraus

$$z = \sqrt{A} \sin(x' + B)q.$$

Dieser Werth in (2) gesetzt, giebt:

$$-\sqrt{A} \sin(x' + B)q = -q^2y' - p^2x', \quad \text{oder}$$

$$q^2y' = -p^2x' + \sqrt{A} \sin(x' + B)q, \quad \text{also}$$

$$y' = -\frac{p^2}{q^2} . x' + \frac{1}{q^2} \sqrt{A} \sin(x' + B)q,$$

ganz wie Navier findet; da aber

$$\sin(x' + B)q = \sin qx' \cos qB + \sin qB \cos qx',$$

so ist folglich, wenn man die Constanten so umformt, dafs $\frac{1}{q} \sqrt{A} \cos qB = C'$ und $\frac{1}{q} \sqrt{A} \sin qB = C$ wird,

$$y' = -\frac{p^2}{q^2} x' + \frac{1}{q} \left\{C' \sin qx' + C \cos qx'\right\}$$

$$y' = \frac{1}{q} \left\{C' \sin qx' + C \cos qx' - \frac{p^2}{q} x'\right\}$$

wie im Text angegeben wurde. d. U.

$$C = o, \qquad C' = \frac{p^2}{q^3 \cos qX}, \qquad f = \frac{p^2}{q^3}(\operatorname{tang} qX - qX).$$

Setzt man für C, C' und f ihre Werthe und statt x' jetzt wieder $X - x$, und statt y' wieder $f - y$, so gelangt man zu der Gleichung:

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left[qx - \left(\frac{\sin qX - \sin q(X-x)}{\cos qX}\right)\right],$$

für die Curve, welche das Prisma bei seiner Biegung annehmen wird.

23) *Zur Berechnung des Querschnitts des Prismas* hat man, wenn α der Winkel ist, welchen eine Tangente an der Curve mit der Axe der X macht

$$T = -P \sin\alpha + Q\cos\alpha, \quad \text{und überdies} \quad V\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{V}{\varepsilon}[P(X-x) + Q(f-y)].$$

Für die Befestigungsstelle des Prismas werden diese beiden Werthe zu Maximis, und weil für diese Stelle $X = o$, $\alpha = o$ ist, so bekommt man:

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}(Qf + PX). \qquad \text{(A)}$$

24) *Bemerkung über Vereinfachungen, deren die Formeln in Nr. 22 fähig sind.* Wir wollen gleich hier eine Bemerkung machen, die eine Vereinfachung der noch folgenden Rechnungen bezweckt. So eben haben wir gefunden $f = \frac{p^2}{q^3}(\operatorname{tang} qX - qX)$. Nun ist aber $qX = \operatorname{tang} qX - \frac{\operatorname{tang}^3 qX}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 qX}{5} - \text{etc.}$,

überdies nach den früher gewählten Abkürzungen $qX = X\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$, und es wird, weil ε gegen Q sehr grofs ist, dieser Bogen qX immer sehr klein sein, wefshalb man ohne merklichen Fehler die fünfte Potenz von qX vernachlässigen und schreiben kann:

$$f = \frac{p^2}{q^3} \cdot \frac{\operatorname{tang}^3 qX}{3} = \frac{P}{3\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{Q}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \operatorname{tang}^3 qX.$$

Weil aber qX sehr wenig von $\operatorname{tang} qX$ verschieden ist und beide Werthe schon an sich sehr klein sind, so folgt, dafs $(qX)^3$ noch weniger von $\operatorname{tang}^3 qX$ verschieden sein wird, und man schreiben kann:

$$f = \frac{P}{3.\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{Q}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{Q}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} X^3 = \frac{PX^3}{3.\varepsilon},$$

welches genau der Werth für die Gröfse des Krümmungspfeils ist, den man gefunden haben würde, hätte man ein horizontales Prisma betrachtet, welches an einem Ende eingemauert, am anderen durch eine vertical wirkende Kraft P beansprucht wird. Die Kraft Q übt also keinen wesentlichen Einflufs auf die Biegung des Prismas aus, weil sie, in den in praktischen Fällen vorkommenden Grenzen bleibend, gegen ε immer sehr klein sein wird.

25) Abstrahirt man also von dem Einflusse der Kraft Q auf die Vermehrung der Biegung, so reducirt sich die Gleichung zur Berechnung des Querschnitts auf:

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon} PX. \qquad \text{(B)}$$

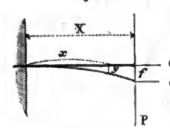


Fig. 12.

26) Zweiter Fall. *Wo die horizontale Kraft das Prisma zu verlängern sucht.* (Fig. 12).

Für diesen Fall wird die Differentialgleichung für das Gleichgewicht, wenn man alle Bezeichnungen der Nr. 5 und 22 beibehält:

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} - q^2y' + p^2x' = o,$$

deren vollständiges Integral ist:

$$y' = \frac{p^2x'}{q^2} + Ce^{qx'} + C'e^{-qx'\,*)}; \qquad (a)$$

---

*) Die Entwickelung dieses Integrals einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung ist der früher gegebenen ganz ähnlich, und mag defshalb nur kurz hier angedeutet werden:

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} + p^2x' - q^2y' = o.$$

Man setze (1) $\frac{d^2y'}{dx'^2} = z$; (2) $z = -p^2x' + q^2y'$,

hieraus $\frac{dz}{dx'} = -p^2 + q^2\frac{dy'}{dx'}$; (3) $\frac{d^2z}{dx'^2} = q^2\frac{d^2y'}{dx'^2}$.

Substituirt man (3) in (1), so erhält man

$$\frac{1}{q^2}\,\frac{d^2z}{dx'^2} = z \quad \text{oder} \quad \frac{d^2zdz}{dx'^2} = q^2zdz;$$

Dies läfst sich schreiben: $\frac{1}{2}d\left(\frac{dz}{dx'}\right)^2 = q^2zdz$;

integrirt man, so kommt $\left(\frac{dz}{dx'}\right)^2 = q^2z^2 + \text{Const.}$

Für $z = o$ werde $\frac{dz}{dx'} = A$ also $\text{Const} = A^2$,

mithin $\left(\frac{dz}{dx'}\right)^2 = q^2z^2 + A^2$,

und hieraus: $dx' = \frac{dz}{\sqrt{A^2 + q^2z^2}}$.

Integrirt man dies nach der allgemeinen Formel:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log.\text{nat}.(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) + \text{Const.},$$

so erhält man:

$$x' = \frac{1}{q}\log.\text{nat}.(qz + \sqrt{A^2 + q^2z^2}) + \text{Const.}$$

Für $z = o$ wird auch $x' = o$ werden, und man erhält:

$$\text{Const.} = -\frac{1}{q}\log.\text{nat}.B,$$

wobei B ebenso wie früher A einen später zu bestimmenden constanten Werth bezeichnet. Also

$$qx' = \log.\text{nat}.\left(\frac{qz + \sqrt{A^2 + q^2z^2}}{B}\right) \quad \text{oder}$$

Differenziirt man nach x' so erhält man:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p^2}{q^2} + qCe^{qx'} - qC'e^{-qx'};$$

aber für $x' = o$ hat man $y' = o$, und für $y' = f$, $x' = X$ und $\frac{dy'}{dx'} = o$, woraus folgt

$$C' = -C, \quad C = -\frac{p^2}{q^3(e^{qX} + e^{-qX})}, \quad f = \frac{p^2}{q^3}\left(qX - \frac{e^{qX} - e^{-qX}}{e^{qX} + e^{-qX}}\right),$$

und setzt man wieder für x' und y' ihre Werthe $X - x$ und $f - y$ und substituirt die Werthe von C' und C in die Gleichung (a), so findet man

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left(qx - \frac{e^{qX} - e^{-qX} - e^{q(X-x)} + e^{-q(X-x)}}{e^{qX} + e^{-qX}}\right).$$

27) Um die Gleichung zur Berechnung des Querschnitts des Prismas aufzustellen, differenziire man die letzte Gleichung zwei Mal, wodurch man erhält:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p^2}{q}\left(\frac{e^{q(X-x)} - e^{-q(X-x)}}{e^{qX} + e^{-qX}}\right).$$

Ueberdies wird man, wenn α der Winkel ist, den die Tangente an irgend einem Punkte der Curve mit der mittleren Axe macht, finden:

$$T = P \sin\alpha + Q \cos\alpha.$$

Das Maximum der beiden letzten Ausdrücke erhält man für $x = o$, $\alpha = o$, daher:

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{VP}{\varepsilon \cdot q} \cdot \frac{e^{qX} - e^{-qX}}{e^{qX} + e^{-qX}}.$$

28) Nehmen wir hier wiederum an, wie es in der Praxis wirklich der Fall ist, dafs qX klein genug sei, um seine vierte Potenz vernachlässigen zu können, so wird man finden, wenn man e^{qX} und e^{-qX} in eine Reihe nach qX entwickelt, dafs die früheren Formeln sich reduciren auf:

$$f = \frac{PX^3}{3\varepsilon}, \quad \frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon} PX. \quad \text{(C)}$$

$$e^{qx'} = \frac{qz + \sqrt{A^2 + q^2z^2}}{B}$$

oder auch $\quad Be^{qx'} - qz = \sqrt{A^2 + q^2z^2};$

aufbeiden Seiten quadrirt: $\quad B^2e^{2qx'} - 2Bqze^{qx'} + q^2z^2 = A^2 + q^2z^2,$

hieraus findet sich: $\quad z = \frac{B^2e^{2qx'} - A^2}{2Bqe^{qx'}}$

oder ferner: $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{q} \cdot e^{qx'} - \frac{A^2e^{-qx'}}{2Bq} = z.$

Setzt man nun: $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{q^2} = C \quad$ und $\quad \frac{A^2}{2Bq^2} = C',$

und substituirt, so wird: $\quad q^2Ce^{qx'} - q^2C'e^{-qx'} = z.$

Substituirt man aus (2) den Werth für z so kommt·

$$-p^2x' + q^2y' = q^2Ce^{qx'} - q^2C'e^{-qx'}$$

oder $\quad y' = \frac{p^2}{q^2}x' + Ce^{qx'} - C'e^{-qx'};$

wie im Texte angegeben ist. d. U.

Hier gilt dieselbe Bemerkung wie in Nr. 24. Man hätte die so eben erhaltenen Formeln gleich bekommen, wenn man von vorne herein den Einflufs der Kraft Q auf die Biegung vernachlässigt, und diese letztere als blofs von einer, normal zur Länge des Prismas wirkenden Kraft herrührend, angenommen hätte.

29) *Horizontales Prisma, welches durch eine Kraft Q zusammengedrückt oder ausgedehnt wird und auf die Längeneinheit mit einem Gewichte p gleichförmig belastet ist.* Wir wollen die eben gemachte Bemerkung gleich benutzen, um den Fall, wo statt des Gewichts P eine gleichförmige Belastung des Prismas die Biegung verursacht, in die einfachste Form zu bringen. Nennen wir durchweg p das Gewicht, womit die Längeneinheit des Prismas belastet ist, setzen $P = o$ und vernachlässigen die von Q herrührende Biegung, so reducirt sich die allgemeine Gleichung in Nr. 21 auf

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} \int_{u=x}^{u=X} p(u-x) \quad \text{oder auf} \quad \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{X^2}{2} - Xx + \frac{x^2}{2}\right).$$

Integrirt man darauf zwei Mal zwischen $x = o$ und $x = x$, so erhält man nach einander:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{X^2x}{2} - \frac{Xx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right); \qquad y = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{X^2x^2}{4} - \frac{Xx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right).$$

Nennt man f die bei der Biegung erfolgende verticale Verschiebung des äufsersten Endes des Prismas, so erhält man, gleichzeitig $y = f$ und $x = X$ setzend:

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{pX^4}{8}.$$

Bei der Berechnung des Querschnitts des Stückes mufs die Kraft Q berücksichtigt werden, und man hat, weil $V \frac{d^2y}{dx^2} = V \cdot \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{X^2}{2}$ ist:

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon} \cdot \frac{pX^2}{2}. \qquad \text{(D)}$$

30) *Horizontales Prisma, an einem Ende eingemauert, am anderen durch zwei, vertical und horizontal wirkende Kräfte, P und Q in Anspruch genommen und mit gleichförmig auf seiner Länge verbreiteten Gewichten belastet.* Durch Zusammenstellung der Endresultate der Nr. 22, 26 und 29 findet man, dafs für ein auf die Längeneinheit mit p belastetes Prisma, an dessen Ende zwei Kräfte, P und Q, vertical und horizontal gerichtet, angreifen, je nachdem P in demselben oder im entgegengesetzten Sinne mit p wirkt:

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{PX^3}{3} \pm \frac{pX^4}{8}\right), \qquad \frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\left(PX \pm \frac{pX^2}{2}\right),$$

Diese Formeln geben nur Annäherungen, die aber für den praktischen Gebrauch genügen.

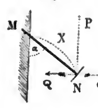


Fig. 13.

31) *Geneigtes Prisma, an einem Ende eingemauert am andern durch zwei Kräfte, die eine horizontal die andere vertical wirkend, in Anspruch genommen.* (Fig. 13.)

Es schliefse das Prisma mit der Verticale den Winkel α ein, P und Q seien die verticalen und horizontalen Kräfte, beide am äufsersten freien Ende angreifend, X die Länge MN des Prismas, so kann die Resultante der beiden Kräfte P und Q von neuem in zwei Composanten zerlegt werden, von denen die eine

$P' = P \sin\alpha \mp Q \cos\alpha$, rechtwinklig auf die Länge von MN, die andere
$Q' = P \cos\alpha \pm Q \sin\alpha$, parallel zur Länge der Fasern gerichtet ist.

Betrachtet man also statt der Kräfte P und Q die beiden Kräfte P' und Q', so fällt die Aufgabe jetzt mit den in Nr. 22 und 26 behandelten zusammen, und man braucht nur in den Formeln dieser Nummern $\frac{P}{\varepsilon}$ durch $\frac{P'}{\varepsilon}$ und $\frac{Q}{\varepsilon}$ durch $\frac{Q'}{\varepsilon}$ zu ersetzen, um gegenwärtige Aufgabe gelöst zu haben.

32) Setzt man dann für P' und Q' ihre Werthe, so wären die abgekürzten Formeln:

$$f = \frac{P\sin\alpha \mp Q\cos\alpha}{3.\varepsilon}.X^3,\quad \frac{R'}{E} = \frac{P\cos\alpha \pm Q\sin\alpha}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}(P\sin\alpha \mp Q\cos\alpha).X. \quad \text{(E)}$$

Die oberen Zeichen gelten für den Fall, wo die Kraft Q das Prisma zusammenzudrücken sucht, und die unteren für den Fall, wo sie dasselbe ausdehnen will.

33) Ist Q nicht bestimmt gegeben, sondern kann man es so anordnen, dafs dabei $f = o$ wird, so würde sein Werth sein

$$Q = P \operatorname{tang} \alpha, \qquad \text{(F)}$$

und dann reducirte sich die Formel zur Berechnung des Querschnitts auf

$$R' = \frac{P}{\Omega \cos\alpha}.$$

34) *Bemerkung über das Zeichen des zweiten Theils des Werthes* $\frac{R'}{E}$ *bei den Untersuchungen der Nr.* 28 *bis* 33. Ueber die Werthe von $\frac{R'}{E}$ für die in den Nr. 28 bis 33 behandelten Prismen, ist hier eine wesentliche Bemerkung anzuführen, die auch bei anderen Untersuchungen derselben Art gilt. Sie besteht nämlich darin, dafs, was für ein Zeichen man auch für den Werth $\frac{V}{\varepsilon}\left(PX \pm \frac{pX^2}{2}\right)$ finden möge, er doch immer ein positives Zeichen erhalten und dem $\frac{Q}{E\Omega}$ hinzugefügt, aber niemals davon abgezogen werden müsse. Das Zeichen dieses Werthes zeigt blofs an, ob das Prisma in der Richtung der Kraft P oder in der von pX gebogen ist; deshalb ist aber die durch die Biegung verursachte Gröfse der Zusammendrückung oder Ausdehnung der Fasern nicht

weniger der durch die Kraft Q hervorgebrachten Gröfse der Zusammendrückung oder Ausdehnung hinzuzufügen.

Fig. 13.

35) *Geneigtes Prisma, an dessen Ende zwei Kräfte, vertical und horizontal gerichtet, angreifen, und auf dessen Länge Gewichte gleichförmig vertheilt sind.* Nach den in den Nr. 24 und 28 gemachten Bemerkungen sind wir berechtigt bei der Berechnung der Biegung dieses Prisma, die zur Länge der Fasern parallel gerichteten Composanten zu vernachlässigen. Durch diese Vereinfachung erhält man, die Bezeichnungen der Nr. 31 beibehaltend und mit p das auf die Längeneinheit verbreitete Gewicht bezeichnend, als Gleichung der Curve

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\left[-(P\sin\alpha - Q\cos\alpha)\left(\frac{Xx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + p\sin\alpha\left(\frac{X^2x^2}{4} - \frac{Xx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)\right],$$

für den Krümmungspfeil erhält man:

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\left(-(P\sin\alpha - Q\cos\alpha)\frac{X^3}{3} + p\sin\alpha\frac{X^4}{8}\right),$$

und zur Berechnung des Querschnitts des Prismas dient die Gleichung:

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q\sin\alpha - (pX - P)\cos\alpha}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\left(-(P\sin\alpha - Q\cos\alpha)X + p\sin\alpha\frac{X^2}{2}\right). \quad \text{(G)}$$

In den gewöhnlichsten praktischen Fällen hat man $pX = P$, und Q wird durch die Forderung bestimmt, dafs das Ende M sich in horizontaler Richtung nicht verschiebe, für welchen Fall wird:

$$f = o, \quad Q = \tfrac{3}{8}P\,\text{tang}\,\alpha, \quad \text{(H)} \qquad \frac{R'}{E} = P\left(\frac{5}{8}\frac{(1-\cos^2\alpha)}{E\Omega\cos\alpha} + \frac{V}{\varepsilon}\frac{X\sin\alpha}{8}\right). \quad \text{(I)}$$

Man bemerkt leicht, dafs, wenngleich man $f = o$ gesetzt hat, doch der Ausdruck für die Gröfse der Verkürzung der Fasern des Prismas durch die Biegung aus dem Werthe $\frac{R'}{E}$ nicht verschwinden kann. Denn wenn auch die Kraft Q im Stande ist eine Verschiebung des Punktes N zu verhindern, so kann sie doch der durch die auf der Länge MN gleichförmig vertheilte Belastung hervorgebrachten Biegung keinen Einhalt thun. Wenn man in der Curvengleichung $pX = P$, $Q = \frac{3}{8}P\,\text{tang}\,\alpha$ setzt, so bekommt man

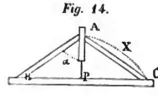
$$y = -\frac{P\sin\alpha}{48\,.\,\varepsilon}\left(5x^3 - 3Xx^2 + \frac{2x^4}{X}\right).$$

Bildet man das zweite Differential-Verhältnifs und setzt dies $= o$, so findet man als Werthe von x, welche y zu einem Maximum machen:

$$x = o, \qquad \text{und} \qquad x = 0{,}36\,X.$$

36) *Anwendung der Formeln für horizontale oder geneigte Prismen, auf die Anordnung von Dachgerüsten, Brücken etc.* Die Formeln in den Nr. 22 bis 33 finden zahlreiche und interessante Anwendungen bei Constructionen zum Tragen der Dachgerüste und der Gebälke von Gebänden, zum Stützen des Oberbaues bei Brücken und dergleichen mehr. Einige derselben wollen wir hier anführen.

Fig. 14.



Das einfachste Dachgerüst besteht aus zwei Sparren, *AB* und *AC*, in *A* mit einer Hängesäule verbunden, und in ihrem Abstande durch einen Durchzug oder ein Zugband *BC* gehalten. Das Gewicht der Bedachung kann immer als gleichförmig auf der Länge des Sparrens vertheilt, betrachtet werden.

Gewöhnlich ist die Verbindung von Sparren und Hängesäule noch durch Zangen, Spannriegel oder Streben, welche eine Unveränderlichkeit des Winkels *BAP* oder α herbeiführen, gesichert, indessen wenn auch diese Theile nicht im Dachstuhle vorhanden wären, könnte man doch, da die Biegung immer sehr gering sein wird, diesen Winkel als sehr wenig sich verändernd betrachten.

Der Fufs des Sparrens übt gegen seinen Auflagepunkt eine Verticalpressung gleich dem Gewichte *P* aus, welches der Sparren tragen mufs, und auf den Durchzug einen Schub den wir mit *Q* bezeichnen wollen.

Umgekehrt aber erfährt der Fufs des Sparrens von Seiten des Durchzuges und des Stützpunktes *B*, Gegendrücke die resp. gleich *Q* und *P* sind.

Da wir nun zugegeben haben, dafs der Winkel *BAP* unveränderlich ist, so wird nichts an dem Gleichgewichte des Theils *AB* geändert, wenn man ihn in *A* eingemauert oder überhaupt befestigt annimmt. Er befindet sich dann ganz in denselben Umständen wie das in Nr. 35 betrachtete Prisma, und zur Berechnung seines Querschnitts hat man, weil $Q = \frac{5}{8} P \operatorname{tang} \alpha$ die Formel (siehe die Formel *G* in Nr. 35)

$$\frac{R'}{E} = P\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{(1-\cos^2\alpha)}{E\Omega\cos\alpha} + \frac{V}{\varepsilon} \cdot \frac{X\sin\alpha}{8}\right).$$

Handelt es sich um ein rechtwinkliges Prisma, dessen Querschnittsseiten a und b sind, so giebt diese Formel

$$ab^2 = \frac{P}{R'}\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha} \cdot b + \frac{3}{4} X\sin\alpha\right). \qquad \text{(a)}$$

Der Ausdruck $\frac{5}{8}\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)b$, der mit k bezeichnet werden mag, wird immer sehr klein sein, und da wir diese Formel zur Berechnung des Sparrens eines Dachstuhls, der die Bedeckung eines Gebäudes tragen soll, benutzen wollen, können wir sie vereinfachen, indem wir für k einen Mittelwerth annehmen. Die gebräuchlichsten Neigungen der Dächer sind, die Winkel mit der Verticale gerechnet:

$$\alpha = 45^\circ, \qquad \alpha = 57^\circ, \qquad \alpha = 63^\circ.$$

Für $\alpha = 45^\circ$, $k = 0{,}444\ b$.
Für $\alpha = 57^\circ$, $k = 0{,}810\ b$.
Für $\alpha = 63^\circ$, $k = 1{,}100\ b$.

Das Mittel aus diesen Werthen ist $0{,}777\ b$, und diesen Werth von k wollen wir benutzen.

Ueberdies bemerken wir, dafs $X\sin\alpha$ die Horizontal-Projection des Theils *AB* ist, und setzen wir $X\sin\alpha = L$, so wird die Formel (a) zu

$$ab^2 = \frac{P}{R'}(0{,}777\,b + 0{,}75\,L).$$

Ist der Theil AB von Holz, so wird R' gleich 700 000k, und nimmt man den Meter zur Einheit, so wird man haben:

$$ab^2 = P(0{,}00000\,111\,.\,b + 0{,}00000\,107\,L).$$

37) Der Durchzug erfährt durch die Sparren eine Spannung gleich $\frac{5P\tang\alpha}{8}$ (Nr. 35), überdies wird er durch sein Eigengewicht gebogen.

Man berechnet seinen Querschnitt indem man ihn wie in seiner Mitte eingemauert betrachtet, am einen Ende durch eine horizontale Kraft gezogen und mit dem gleichförmig auf seine Länge verbreiteten Eigengewichte belastet.

Er befindet sich dann in den in Nr. 29 angegebenen Umständen und zur Berechnung seiner Dimensionen benutzt man die Gleichung (siehe die Formel D der Nr. 29.)

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\,.\,\frac{pX^2}{8},$$

in welcher, wenn Π die Dichtigkeit des Materials bezeichnet, aus welchem der Durchzug besteht, man $p = \Omega\Pi$, und überdies $Q = \frac{5P\tang\alpha}{8}$ setzen kann und dann hat:

$$\frac{R'}{E} = \frac{5}{8}\,.\,\frac{P\tang\alpha}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\,.\,\frac{\Pi\Omega X^2}{8}.$$

Ist der Durchzng ein rechteckiges Prisma, so erhält man

$$\Omega = ab, \qquad \varepsilon = \frac{E}{12}\,ab^3, \qquad \text{also} \qquad ab = \frac{1}{R'}\left(\frac{5P\tang\alpha}{8} + \frac{3\Pi aX^2}{4}\right). \qquad (b)$$

In dieser Formel bezeichnet X die ganze Länge des Durchzuges, wenn derselbe nur in B und C unterstützt ist, oder auch die gröfste Entfernnng zwischen zwei Unterstützungspunkten desselben, wenn sich deren zwischen B und C (Fig. 14) finden.

Es ist weder möglich noch nothwendig diese Formel sehr zu vereinfachen, indessen, um den trigonometrischen Ausdruck tang α daraus verschwinden zu lassen, wollen wir statt tang α das Verhältnifs der halben Spannweite des Dachstuhls zu seiner Höhe oder $\frac{BP}{AP}$ (Fig. 14) $= \frac{o}{h}$ setzen, und schreiben:

$$ab = \frac{1}{R'}\left(\frac{5P\,.\,o}{8h} + \frac{3\Pi aX^2}{4}\right).$$

Ist der Durchzug von Holz, so ist $R' = 700\,000$k, ist er von Eisen, $R' =$ 6 000 000k. Der Querschnitt eines hölzernen Durchzuges berechnet sich also nach der Formel:

$$ab = 0{,}000\,000\,9\,P\,.\,\frac{o}{h} + 0{,}00000\,107\Pi aX^2,$$

und der eines eisernen Zugbandes durch die Formel:

$$ab = 0{,}000\,000\,1\,P\,.\,\frac{o}{h} + 0{,}000000\,11\Pi aX^2.$$

Fig. 15.

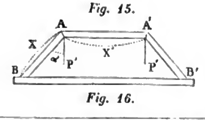
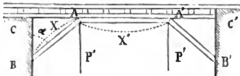


Fig. 16.



Betrachten wir jetzt ein System, welches aus zwei geneigten Stücken AB, $A'B'$, die gegen einen Spannriegel AA' stofsen, zusammengesetzt ist. An den Untertheilen sind AB und $A'B'$ entweder durch einen Durchzug BB' (Fig. 15) oder durch gemauerte Widerlager BC, $B'C'$ (Fig. 16) zusammengehalten.

Nehmen wir jetzt an, dafs gleiche Gewichte P' in A und A' aufgehangen und dafs die Streben AB und AB' aufserdem mit gleichförmig auf ihrer Länge verbreiteten Gewichten belastet seien. Bezeichnen wir die Länge einer der Streben AB oder $A'B'$ durch X, durch p die Belastung der Längeneinheit der Strebe von der Länge X, durch α den Winkel, welchen sie mit der Verticalen einschliefst, welchen Winkel wir als durch die Verbindungsart der Theile AB und AA' unveränderlich geworden ansehen.

Die Stützpunkte B und B' haben jede eine Verticalpressung $P'+pX$ und einen Horizontalschub gleich $P' \tang \alpha + \frac{3}{8} pX \tang \alpha$ (Nr. 33 und 35) zu ertragen.

Ersetzt man die Stützpunkte durch die Drücke, welche sie ertragen, und bemerkt, dafs die Unveränderlichkeit des Winkels bei A erlaubt, sich dieses Ende eingemauert zu denken, so sieht man, dafs die Strebe AB in denselben Umständen sich befindet, als wenn sie wäre: 1) in A eingemauert; 2) gleichförmig mit dem Gewichte p auf der Längeneinheit belastet; 3) durch eine verticale Kraft $P'+pX$ und durch eine horizontale Kraft $(P'+\frac{3}{8}pX)\tang\alpha$ in Anspruch genommen, welche Voraussetzungen wir in Nr. 35 betrachtet haben. Setzt man also in der Gleichung (G) dieser Nummer $P=P'+pX$, $Q=(P'+\frac{3}{8}pX)\tang\alpha$, so wird man erhalten:

$$\frac{R'}{E}=\frac{1}{E\Omega\cos\alpha}\left(P'+\frac{5}{8}pX\sin^2\alpha\right)+\frac{V}{\varepsilon}\,\frac{pX^2\sin\alpha}{8}.$$

Setzt man $pX=P''$

$$\frac{R'}{E}=\frac{1}{E\Omega\cos\alpha}\left(P'+\frac{5}{8}P''\sin^2\alpha\right)+\frac{V}{\varepsilon}\,\frac{P''X\sin\alpha}{8}.$$

Ist die Strebe rechteckig und die Höhe und Breite des normalen Querschnitts sind b und a, so wird die Formel

$$ab^2=\frac{1}{R'}\left[\left(\frac{8P'+5P''\sin^2\alpha}{8\cos\alpha}\right)b+\frac{3}{4}P''X\sin\alpha\,.\right. \qquad (a')$$

Der erste Theil des Gliedes der rechten Seite wird gegen den zweiten desselben immer sehr klein sein, weil b sehr klein gegen X ist. Wir benutzen diese Bemerkung, um der Formel eine einfachere Gestalt zu geben zwischen gewissen Grenzen des Winkels α. Wir wollen willkürlich $P'=\frac{1}{2}P''$ annehmen, wonach der erste Theil rechts sich auf $P''b\,.\,\frac{4+5\sin^2\alpha}{8\cos\alpha}$ reducirt, und dieser Werth heifse K.

Für $\alpha = 45^\circ$ $K = 1{,}149\ P''b$.
Für $\alpha = 57^\circ$ $K = 1{,}744\ P''b$.
Für $\alpha = 63^\circ$ $K = 2{,}783\ P''b$.

Nehmen wir hiernach $1{,}80\ P''b$ als Mittelwerth von K, bemerken ferner, dafs $X \sin\alpha$ die Horizontalprojection von AB ist, und bezeichnen diese durch L, so wird die Formel (a′) zu:

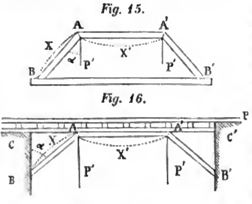
$$ab^2 = \frac{P''}{R'}(1{,}80 \,.\, b + 0{,}75 \,.\, L).$$

Ist die Strebe von Holz, $R' = 700\,000^k$, den Meter als Einheit genommen, so hat man

$$ab^2 = P''(0{,}00000\,257 \,.\, b + 0{,}00000\,107 \,.\, L). \qquad (b')$$

39) Ein Blick auf die Fig. 1 Taf. XXV. zeigt, dafs der Dachstuhl des Palladio aus zwei Theilen besteht; der eine oberhalb des Spannriegels bildet ein einfaches Gespärre, dessen Durchzug der Spannriegel selbst ist. Der untere Theil mit demselben Spannriegel verbunden, ist nichts Anderes als das aus den drei Theilen AB, $A'B'$ und AA' (Fig. 15) bestehende System, welches wir so eben betrachtet haben.

Wir sind also berechtigt, uns der Formeln Nr. 37 und 38 zur Berechnung des Querschnitts dieser Theile zu bedienen, benutzen jedoch die vereinfachten Formeln, die für die Praxis mehr als genügend genau sind. (Siehe die Anwendungen im Cap. IX der Abhandlung.)



Das System $BAA'B'$ (Fig. 15 oder 16) für sich betrachtet, kann als Tragwand für eine hölzerne Brücke dienen, für welchen Fall die abgekürzte Formel (b') der Nr. 38 auch gebraucht werden kann. Der Spannriegel AA' wird eine Pressung aushalten müssen, die dem Zuge gleich ist, welchen ein zwischen B und B' angebrachtes Zugband erfahren würde. Die Formel (b) der Nr. 37 zur Berechnung des Querschnitts eines Zugbandes kann ebenfalls für den Spannriegel AA' dienen.

40) *Dimensionen eines eisernen Zugbandes (Durchzuges), damit es den, vom Sinken der Temperatur herrührenden Zunahmen der Spannung widerstehen könne.*

Wenn ein Gespärre zur Ueberdeckung eines sehr weiten Gebäudes ein eisernes Zugband erhalten sollte, so würde man dies wie einen hölzernen Durchzug nach der Formel (b) Nr. 37 berechnen. Hat man aber auf diese Weise seine Dimensionen gefunden, so hat man sich noch zu versichern, dafs es den beim Sinken der Temperatur zunehmenden Spannungen widerstehen könne. Nennen wir V und V' die höchste und niedrigste Temperatur, welche an dem Orte, wo das Zugband sich befindet, möglicherweise vorkommen, T die absolute Spannung

(für den ganzen Querschnitt), die es wenigstens haben mufs, um seinen Zweck zu erfüllen, T' die gröfste Spannung auf die Flächeneinheit des Querschnitts, die temporär Statt finden darf, E den Elasticitäts-Modul des Eisens $= 20\,000\,000\,000$ für den Quadratmeter, $\delta = 0{,}0000\,112$ die lineare Ausdehnung des Eisens für jeden Grad des Cels. Thermometers und Ω den Querschnitt des Zugbandes.

Wir wollen voraussetzen, dafs am Tage, wo man das Zugband anlegt, genau die höchste, überhaupt vorkommende Temperatur V' Statt finde, so wird nach Maafsgabe des Sinkens der Temperatur das Zugband sich zu verkürzen streben; da es aber seine Länge zu behalten gezwungen ist, wird es diejenige Spannung ertragen müssen, welche es um die Länge ausdehnt, um welche es sich jetzt zu verkürzen sucht, bis die andere Temperaturgrenze V'' eingetreten ist. Die Verkürzung auf den Meter ist aber:

$$\delta\,(V' - V''),$$

und wenn t die spannende Kraft ist, welche diese Verlängerung hervorbringen kann, so ist:

$$\frac{t}{E\Omega} = \delta\,(V' - V'').$$

Nun findet aber die Gleichung für die Grenze der Belastung Statt:

$$T + t = T'\Omega \qquad \text{oder} \qquad T + \delta\,(V' - V'')\,E\Omega = T'\Omega,$$

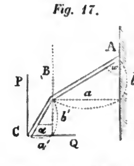
woher man erhält:

$$\Omega = \frac{T}{T' - \delta(V' - V'')\,E}. \qquad \text{(M)}$$

41) Handelt es sich um ein Zugband für ein Gespärre nach Palladio, wie das auf Taf. XXV. Fig. 1 angegeben, so ist T nichts Anderes als der Schub des Gespärres oder $\frac{5}{8}\,P\frac{o}{h} = 0{,}625\,P\frac{o}{h}$; man kann dabei ohne Gefahr $T' = 12\,000\,000$ setzen, noch gröfser es zu nehmen, möchte nicht zu rathen sein. Substituirt man für E, T und T' ihre Werthe, so wird die Formel zu:

$$\Omega = \frac{0{,}625\,P\frac{o}{h}}{12\,000\,000 - (V' - V'')\,224\,000}$$

Fig. 17.



42) *Geneigtes Prisma, an einem Ende eingemauert, am anderen von zwei Kräften beansprucht, die an einem Hebelarme auf dasselbe wirken.* Es sei AB (Fig. 17) ein in A eingemauertes Prisma, welches mit der Verticale einen Winkel ω einschliefst, dessen Länge X, dessen Horizontal- und Vertical-Projection a und b sind, und das auf die Längeneinheit seiner Horizontal-Projection mit dem Gewichte p gleichförmig belastet ist. BC sei ein anderer Theil, welcher mit der Verticale einen Winkel α macht, dessen Horizontal- und Vertical-Projection a' und b' sind, und dessen Länge X' ist. Dieser Theil sei mit dem ersten so verbunden, dafs der Winkel ABC als unveränderlich angesehen werden kann. Am Ende C

16*

greifen zwei Kräfte P und Q, die erste vertical, die andere horizontal an, welche beide mit einander verbundenen Stücke AB und BC zu biegen suchen.

Die Gleichgewichtsbedingung für den Widerstand des Stückes AB gegen Biegung wird sein:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -P(a+a'-x) + Q(b+b'-y) + p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right);$$

die x und y sind auf den Anfangspunkt A und zwei rechtwinklige, horizontale und verticale Axen durch diesen Punkt bezogen.

Wir wollen gleich anfänglich annehmen, dafs $pa = -P$, wie es bei den Gespärren der Fall ist, auf welche wir diese Rechnungen anwenden wollen; überdies bemerken wir, dafs $y = \frac{x}{\operatorname{tang}\omega}$, weil AB eine Gerade ist, wodurch sich die vorige Gleichung reducirt auf:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{2a}(a^2 + 2aa' - x^2) + Q\left(b + b' - \frac{x}{\operatorname{tang}\omega}\right) \quad (K)$$

woraus man durch einmalige Integration erhält:

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2a}\left((a^2 + 2aa')x - \frac{x^3}{3}\right) + Q\left((b+b')x - \frac{x^2}{2\operatorname{tang}\omega}\right) + C.$$

Das Integral mufs zwischen $x = o$ und $x = x$ genommen werden. Für $x = o$ hat man aber $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tang}\omega} = \frac{b}{a}$; also $C = \varepsilon \cdot \frac{b}{a}$. Integrirt man nochmals, so kommt:

$$\varepsilon\left(y - \frac{b}{a}x\right) = -\frac{P}{2a}\left(\frac{(a^2+2aa')x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + Q\left(\frac{(b+b')x^2}{2} - \frac{x^3}{6\operatorname{tang}\omega}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = a$, so wird $y = b - f$ sein müssen, und wenn man die verticale Verschiebung des Punktes B bei der Biegung von AB mit f bezeichnet, hat man demnach:

$$f = Pa^2\left(\frac{5a + 12a'}{24\varepsilon}\right) - Qa^2\left(\frac{3b' + 2b}{6\varepsilon}\right).$$

Die Verschiebung des Punktes B in horizontaler Richtung wird sein:

$$f \operatorname{tang}\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}\left[Pa^2\left(\frac{5a + 12a'}{24\varepsilon}\right) - Qa^2\left(\frac{3b' + 2b}{6\varepsilon}\right)\right].$$

Untersuchen wir jetzt, unter der Voraussetzung, beide Theile AB und BC seien biegsam, wie grofs die horizontale nnd verticale Verschiebung des äufsersten Endes C des Theils BC sein wird.

Es ergiebt sich leicht, dafs die Verschiebung des Punktes C gleich der Summe aus der oben berechneten Verschiebung des Punktes B und der Verschiebung des Punktes C sein wird, welche letztere man berechnet, indem man annimmt, dafs das Stück BC mit der Verticale einen constanten Winkel α einschliefse und durch die beiden Kräfte P und Q beansprucht werde. Die Gleichgewichtsbedingung für den Widerstand dieses Stückes ist aber, wenn man die x und y vom Anfangspunkte B rechnet:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -P(a' - x) + Q\left(b' - \frac{x}{\operatorname{tang}\alpha}\right),$$

woraus, weil für $x = o$, $\frac{dy}{dx} = \frac{b'}{a'}$ wird

$$\varepsilon\left(\frac{dy}{dx} - \frac{b'}{a'}\right) = - P\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right) + Q\left(b'x - \frac{x^2}{2 \operatorname{tang} \alpha}\right).$$

$$\varepsilon\left(y - \frac{b'}{a'}x\right) = - P\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Q\left(\frac{b'x^2}{2} - \frac{x^3}{6 \operatorname{tang} \alpha}\right).$$

Setzt man hierin $x = a'$, so mufs $y = b' - f'$ sein, und da $\frac{1}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{b'}{a'}$, so ist

$$\varepsilon f' = P\frac{a'^3}{3} - Q\frac{a'^2 b'}{3},$$

worin f' die verticale Verschiebnng des Punktes C bezeichnet, welche allein von der Biegung des Stückes BC herrührt; die horizontale Verschiebung von C wird sein:

$$f' \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha}[Pa'^3 - Q\,a'^2 b'].$$

Betrachtet man jetzt das ganze System ABC im Zusammenhange, so hat man für die totalen Verschiebungen des Punktes C, wenn man $F = f + f'$ setzt, in verticaler Richtung:

$$F = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{P}{24}[a^2(5a + 12a') + 8a'^3] - \frac{Q}{6}[a^2(3b' + 2b) + 2a'^2 b']\right),$$

und in horizontaler Richtung, wenn man $h = f \operatorname{tang} \omega + f' \operatorname{tang} \alpha$ setzt:

$$h = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{P}{24}\left(\frac{a^2 \sin \omega}{\cos \omega}(5a + 12a') + 8\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}a'^3\right) - \frac{Q}{6}\left(\frac{a^2 \sin \omega}{\cos \omega}(3b' + 2b) + 2\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}a'^2 b'\right)\right].$$

Jetzt wollen wir annehmen, die Kraft Q sei nicht schon von vorne herein gegeben und ihre Gröfse solle so bestimmt werden, dafs jede Horizontalverschiebung des Punktes C verhindert werde. Man wird demgemäfs setzen $h = o$, woraus

$$Q = \frac{P}{4} \cdot \frac{a^2 \operatorname{tang} \omega (5a + 12a') + 8a'^3 \operatorname{tang} \alpha}{a^2 \operatorname{tang} \omega (3b' + 2b) + 2a'^2 b' \operatorname{tang} \alpha},$$

und substituirt man diesen Werth von Q in den von F, so wird dieser letztere:

$$F = \frac{P}{24\varepsilon}\left\{[a^2(5a + 12a') + 8a'^3] - \frac{a^2 \operatorname{tang} \omega (5a + 12a') + 8a'^3 \operatorname{tang} \alpha}{a^2 \operatorname{tang} \omega (3b' + 2b) + 2a'^2 b' \operatorname{tang} \alpha}[a^2(3b' + 2b) + 2a'^2 b']\right\}.$$

Für den Fall, dafs BC vertical wird, ist a' gleich Null, und $\operatorname{tang} \alpha$ ebenfalls auch Null, wodurch der Ausdruck für F auch den Werth Null annehmen wird, welches Resultat indefs nur scheinbar richtig ist. Wirklich würde für den Fall, wo a' Null ist, die verticale Verschiebung des Punktes C dieselbe wie die von B sein, wefshalb:

$$F = \frac{5Pa^3}{24\varepsilon} - \frac{Qa^2}{6\varepsilon}(3b' + 2b).$$

Die durch die nun normal auf BC wirkende Kraft Q hervorgebrachte Ho-

rizontalverschiebung des Punktes C ist in Bezug auf den Punkt B, $f=\frac{Qb'^3}{3\varepsilon}$ und auf den Punkt A bezogen,

$$h=\frac{\tang\omega}{\varepsilon}\left[Pa^2\left(\frac{5a}{24}\right)-4Qa^2\left(\frac{3b'+2b}{24}\right)\right]-\frac{8Qb'^3}{24\varepsilon},$$

Der Werth von Q wird dann

$$Q=\frac{5Pa^3\tang\omega}{4a^2(3b'+2b)\tang\omega+8b'^3};$$

und durch Substitution dieses Werthes in den von F würde man haben:

$$F=\frac{P}{24\varepsilon}\left(5a^3-\frac{5a^5\tang\omega(3b'+2b)}{a^2(3b'+2b)+2b'^3}\right).$$

43) Das aus den beiden Theilen AB und BC zusammengesetzte System (Fig. 17), welches wir so eben betrachtet haben, ist nichts Anderes als das aus einem Sparren und einer Stuhlsäule (Pfosten) gebildete einfache Gespärre, auf Taf. XIV. dargestellt. Bei der Betrachtung eines solchen Gespärres, dessen Sparren mit gleichförmig über seine Länge verbreiteten Gewichten belastet ist, ersetze man die Auflagepunkte durch die Pressungen, welche sie erfahren, und betrachte sowohl den Winkel, welchen die beiden Sparren mit einander einschliefsen, als auch den Winkel, welchen der Pfosten mit den Sparren (also auch mit der Verticale) macht, beide als unveränderlich, so wird man ganz zu den Daten des so eben behandelten Problems gelangt sein. Der Umstand, dafs bei Constructionen die Stücke AB und BC gewöhnlich Tangenten an demselben Kreise sind, läfst eine wesentliche Vereinfachung der vorhergehenden Formeln zu.

Fig. 18.

O sei der Mittelpunkt des Kreises, m der Berührungspunkt des Stückes AB, n der des Stückes BC (Fig. 18.) Man ziehe die Gerade Om, BO und On; A bezeichne den Halbmesser des Kreises, ω den Winkel den AB mit der Verticale und α den Winkel den BC mit der Verticale einschliefst, a und b seien die Horizontal- und Vertical-Projectionen von AB, und a' und b' desgleichen von BC; der Winkel mOC ist dann gleich ω, und der Winkel nOC gleich α, und weil $Bm=Bn$, so ist Winkel $BOn=BOm=\frac{1}{2}(\omega-\alpha)$, woher man hat:

$$b=AO-KO=\frac{A}{\sin\omega}-\frac{A\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)},$$

und daraus endlich:

$$b=A\left(\frac{1}{\sin\omega}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}\right),\quad a=A\tang\omega\left(\frac{1}{\sin\omega}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}\right),$$

$$b'=A\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)},\qquad a'=A\frac{\tang\alpha\sin\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}.$$

$\alpha=3^\circ$, $\omega=63^\circ$ $\begin{cases}a=0{,}9684\ A, & a'=0{,}0316\ A.\\ b=0{,}4334\ A, & b'=0{,}6289\ A.\end{cases}$

$\alpha = 3^\circ, \quad \omega = 57^\circ \quad \begin{cases} a = 0{,}9718\ A, \\ b = 0{,}6311\ A, \end{cases} \quad \begin{matrix} a' = 0{,}0280\ A. \\ b' = 0{,}5612\ A. \end{matrix}$

$\alpha = 3^\circ, \quad \omega = 45^\circ \quad \begin{cases} a = 0{,}9785\ A, \\ b = 0{,}9785\ A, \end{cases} \quad \begin{matrix} a' = 0{,}0218\ A. \\ b' = 0{,}4357\ A. \end{matrix}$

Substituirt man diese Werthe in die oben für Q und F in Nr. 42 gefundenen, so erhält man:

Für $\operatorname{tang}\alpha = 0{,}05$, $\operatorname{tang}\omega = 2{,}000$, $Q = 0{,}454\,P$, $F = 0{,}0020\,\frac{PA^3}{\varepsilon}$.

Für $\operatorname{tang}\alpha = 0{,}05$, $\operatorname{tang}\omega = 1{,}539$, $Q = 0{,}441\,P$, $F = 0{,}0017\,\frac{PA^3}{\varepsilon}$.

Für $\operatorname{tang}\alpha = 0{,}05$, $\operatorname{tang}\omega = 1{,}000$, $Q = 0{,}395\,P$, $F = 0{,}0006\,\frac{PA^3}{\varepsilon}$.

Fig. 19.

Wenn das Stück BC vertical wäre, würde $\operatorname{tang}\alpha$ gleich Null sein, indessen die Werthe von Q und F würden von den vorhergehenden so wenig abweichen, dafs man darauf nicht Rücksicht zu nehmen nöthig hätte.

44) *Von der Biegung krummer Prismen.* (Fig. 19.) Wir nehmen die allgemeine Gleichung aus Nr. 5, welche ist:

$$\varepsilon\,\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = P(X - x) + Q(Y - y) + \int_{u=x}^{u=X} p\,(u - x)\,ds$$

um sie bei der Untersuchung über Biegung solcher Prismen, deren mittlere Axe im gewöhnlichen Zustande eine Curve ist, so wie bei der Berechnung der Schübe, welche diese Prismen in horizontaler Richtung gegen ihre Stützpunkte ausüben, anzuwenden.

Integrirt man die vorige Gleichung, so erhält man dadurch:

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(P(X - x) + Q(Y - y) + \int_{u=x}^{u=X} p(u - x)\,ds\right). \quad (1)$$

$\varphi' - \varphi$ ist der Winkel, den die zu irgend einem Punkte der Curve gehörige Normale nach der Biegung mit der zu demselben Punkte der Curve gehörigen Normale vor der Biegung macht. Da man nur sehr kleine Biegungen als zulässig voraussetzt, so wird $\varphi' - \varphi$ nothwendig ein sehr kleiner Winkel sein, und man kann defshalb ohne merklichen Fehler seinen Sinus dem Bogen und seinen Cosinus der Einheit gleich setzen.

Bekanntermaafsen ist aber:

$$\cos\varphi' - \cos\varphi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi),$$
$$\sin\varphi' - \sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi),$$

woraus man erhält, wenn man $\varphi' = \varphi$ setzt

$$\sin(\varphi' - \varphi) = \varphi' - \varphi, \qquad \cos(\varphi' - \varphi) = 1,$$
$$\cos\varphi' - \cos\varphi = -(\varphi' - \varphi)\sin\varphi, \qquad \sin\varphi' - \sin\varphi = (\varphi' - \varphi)\cos\varphi. \quad (2)$$

Zugleich ist auch $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, und die beiden Gleichungen (2)

werden nun, wenn man darin für $\varphi' - \varphi$ seinen Werth aus der Gleichung (1) setzt:

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \left(P(X-x) + Q(Y-y) + \int_{u=x}^{u=X} p(u-x)\, ds \right). \qquad \text{(A)}$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \left(P(X-x) + Q(Y-y) + \int_{u=x}^{u=X} p(u-x)\, ds \right). \qquad \text{(A)}$$

Die Integrale dieser Gleichungen geben die Verschiebungen in horizontaler und verticaler Richtung von irgend einem Punkte des krummen Prismas, und demnach auch den Schub, den es gegen seine Auflager ansübt.

Fig. 19.

45) *Anwendung der Gleichgewichtsgleichung krummer Stücke auf einen über seine Länge gleichförmig belasteten Kreisbogen, der an einem Ende eingemauert, am anderen von einer verticalen Kraft P und einer horizontalen Kraft Q in Anspruch genommen wird.* (Fig. 19.) Wir wollen ein Beispiel der Rechnungsschritte geben, indem wir einen am äufsersten Ende A eingemauerten (befestigten) Kreisbogen betrachten, der mit auf seine Horizontal-Projection gleichförmig vertheilten Gewichten belastet, am freien Ende C durch zwei Kräfte P und Q, die erste vertical, die andere horizontal wirkend beansprucht ist.

Endlich werden wir noch die Resultate der Rechnung über auf verschiedene Weise belastete Kreisbögen anführen. Nennen wir: A den Halbmesser des Kreises, von welchem AC einen Theil ausmacht, Φ den ganzen zum Bogen gehörigen Winkel, φ den Theil des Winkels zwischen der Verticale und dem Halbmesser, der durch einen Punkt m geht, dessen Coordinaten x und y sind auf den Einmauerungspunkt A als Anfangspunkt bezogen, X die Abscisse und Y die Ordinate des freien Endes C des Bogens, an dem die Kräfte P und Q angreifen, so hat man:

$x = A \sin\varphi, \quad y = A(1 - \cos\varphi), \quad dx = A\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = A \sin\varphi\, d\varphi, \quad ds = A d\varphi;$

und demgemäfs:

$$P(X-x) + Q(Y-y) = A[P(\sin\Phi - \sin\varphi) + Q(\cos\varphi - \cos\Phi)].$$

Um den Werth des Integrals $\int_{u=x}^{u=X} p(u-x)\, ds$ zu erhalten, bemerken wir, dafs, weil die Belastung gleichförmig in Bezug auf die Horizontale verbreitet ist, man dafür das andere Integral $\int_{u=x}^{u=X} p(u-x)\, du$ substituiren kann, dessen Werth ist:

$$p\left(\frac{X^2}{2} - Xx + \frac{x^2}{2}\right),$$

oder indem man X und x als Function von Φ und φ ausdrückt:

$$pA^2\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\Phi - \sin\varphi\sin\Phi + \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right).$$

Die Gleichgewichtsgleichung wird also, wenn man bemerkt, dafs die Kräfte p und Q nach derselben Richtung und P entgegengesetzt wirkten:

$$\varepsilon.(d\varphi' - d\varphi) = A^2 d\varphi \begin{bmatrix} -P(\sin\Phi - \sin\varphi) + Q(\cos\varphi - \cos\Phi) \\ +pA\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\Phi - \sin\varphi\sin\Phi + \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right) \end{bmatrix},$$

integrirt man, so kommt:

$$\varepsilon.(\varphi' - \varphi) = A^2 \left\{ \begin{array}{l} -P(\varphi\sin\Phi + \cos\varphi - 1) + Q(\sin\varphi - \varphi\cos\Phi) \\ +pA\left[\varphi\left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2\Phi}{2}\right) + \sin\Phi(\cos\varphi - 1) - \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right] \end{array} \right\}.$$

Verfährt man mit dieser Gleichung wie mit der allgemeinen Gleichung (Nr. 44), so erhält man daraus:

$$\varepsilon(dx' - dx) = -A^3\sin\varphi\, d\varphi \left\{ \begin{array}{l} -P(\varphi\sin\Phi + \cos\varphi - 1) + Q(\sin\varphi - \varphi\cos\Phi) \\ +pA\left[\varphi\left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2\Phi}{2}\right) + \sin\Phi(\cos\varphi - 1) - \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right] \end{array} \right\}.$$

$$\varepsilon(dy' - dy) = A^3\cos\varphi\, d\varphi \left\{ \begin{array}{l} -P(\varphi\sin\Phi + \cos\varphi - 1) + Q(\sin\varphi - \varphi\cos\Phi) \\ +pA\left[\varphi\left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2\Phi}{2}\right) + \sin\Phi(\cos\varphi - 1) - \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right] \end{array} \right\}.$$

Integrirt man diese Ausdrücke zwischen $\varphi = \varphi$ und $\varphi = o$, so bekommt man:

$$\varepsilon(x' - x) = -A^3 \left\{ \begin{array}{l} -P[\sin\Phi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \cos\varphi - 1] \\ +Q[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \cos\Phi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)] \\ +pA \begin{array}{l} (\frac{1}{2} + \sin^2\Phi)\left(\frac{\sin\varphi}{2} - \frac{\varphi\cos\varphi}{2}\right) \\ +\sin\Phi(\frac{1}{2}\sin^2\varphi + \cos\varphi - 1) - \frac{1}{12}\sin^3\varphi \end{array} \end{array} \right\} \quad (A)$$

$$\varepsilon(y' - y) = A^3 \left\{ \begin{array}{l} -P[\sin\Phi(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1) + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi - \sin\varphi] \\ +Q[\frac{1}{2}\sin^2\varphi - \cos\Phi(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)] \\ +pA \left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{2} + \sin^2\Phi)\left(\frac{\varphi\sin\varphi}{2} + \frac{\cos\varphi}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ +\sin\Phi\left[\sin\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}\varphi\right] + \frac{1}{12}\cos^3\varphi - \frac{1}{12} \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

Macht man in diesen Ausdrücken $\varphi = \Phi$, so erhält man die Verschiebungen des äufsersten freien Endes des Bogens in verticaler und in horizontaler Richtung.

Wir wollen die Resultate dieser Substitution wegen ihrer Länge hier nicht hersetzen, bemerken aber, dafs, wenn Φ klein genug ist, damit man seine sechste Potenz vernachlässigen kann, man erhält, wenn $\cos\Phi$ und $\sin\Phi$ als Functionen von Φ entwickelt werden und man bis zur fünften Potenz von Φ geht, und endlich h und f die Werthe von $x - x'$ und $y - y'$ für $\varphi = \Phi$ nennt,

$$-h = -\frac{PA^3}{\varepsilon} \cdot \frac{5\Phi^4}{24} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \cdot \frac{2\Phi^5}{15} + \frac{pA^4}{\varepsilon} \cdot \frac{9\Phi^5}{120},$$

$$f = \frac{A^3}{\varepsilon}\left[-P\left(\frac{\Phi^3}{3} - \frac{3\Phi^5}{20}\right) + Q\frac{5\Phi^4}{24} + \frac{pA\Phi^4}{8}\right].$$

Wir haben hier eine auf die Horizontal-Projection des Bogens gleichförmig vertheilte Belastung vorausgesetzt, so dafs also $P = pA \sin\Phi$. Betrachtet man indessen einen sehr gedrückten Bogen, so wird die Summe der auf dem Umfange des Bogens gleichförmig vertheilten Gewichte von der Summe der gleichförmig auf seiner Horizontal-Projection verbreiteten Gewichte nicht merklich verschieden sein, und da die Längeneinheit in diesen beiden Fällen mit dem Gewichte p belastet ist, wollen wir zur Vereinfachung $P = p\Phi A$ setzen, und dann kommt:

$$-h = -\frac{A^3}{\varepsilon}\left(-\frac{2P\Phi^4}{15} + \frac{2Q\Phi^5}{15}\right).$$

Um den Schub gegen die Auflager zu erhalten, nehme man an, die Kraft Q solle jede Verschiebung des Punktes M verhindern, also $h = o$ machen, und man erhält

$$Q = \frac{P}{\Phi}, \quad \text{wofür man schreiben darf} \quad Q = \frac{PA}{X} = \frac{P(X^2 + Y^2)}{2XY},$$

woraus endlich kommt:

$$f = \frac{PA^3\Phi^3}{\varepsilon} \cdot \frac{3\Phi^2}{20}, \quad \text{und dafür darf man wieder setzen:} \quad f = \frac{PX^3}{\varepsilon} \cdot \frac{3X^2}{20A^2}.$$

Ist der Bogen Φ sehr klein, so wird man $\frac{A}{X} = \frac{X^2 + Y^2}{2XY}$ auf $\frac{X}{2Y}$ reduciren können, indem man $\frac{Y}{2X}$ vernachlässigt. Die Werthe von f und Q werden dann

$$f = \frac{6PXY^2}{10\varepsilon}, \qquad Q = \frac{PX}{2Y}.$$

In praktischen Fällen können diese Formeln bei gedrückten Bögen, deren Pfeil ein Zehntel der Oeffnung ist, angewendet werden.

Ist der betrachtete Bogen ein Viertelkreis, so wird man $\varphi = \Phi = \frac{\pi}{2}$ machen, um die verticalen und horizontalen Verschiebungen f und h seines äufsersten Endes zu erhalten. Man findet dann (durch Substitution in A dieser Nr.)

$$-h = \frac{A^3}{\varepsilon}\left(-\frac{P}{2} + \frac{pA}{6} + Q\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f = \frac{A^3}{\varepsilon}\left[-P\left(\frac{18\pi - 48}{24}\right) + \frac{12Q}{24} + \frac{pA}{24}(15\pi - 48)\right].$$

Wenn $P = pA$ ist und man Q durch die Bedingung bestimmt, dafs $h = o$ sein soll, so kommt:

$$Q = \frac{4P}{3\pi} = 0{,}44\,P \quad \text{und} \quad f = \frac{PA^3}{\varepsilon}\left(\frac{3\pi^2 - 4\pi - 16}{24\pi}\right) = 0{,}01379\,\frac{PA^3}{\varepsilon}.$$

46) *Gröfste Verschiebung in horizontaler Richtung und Berechnung des Querschnitts des Bogens.* Untersuchen wir jetzt, unter der Voraussetzung, der Fufs C des Bogens AC (Fig. 19), sei durch die Kraft Q beständig in der Verticale CP gehalten, welcher Punkt des Bogens die gröfste Verschiebung in horizontaler Richtung erleiden werde.

Setzen wir in dem Werthe von $x - x'$ (Nr. 45.)

$$P = pA, \qquad \Phi = \frac{\pi}{2}, \qquad Q = \frac{4P}{3\pi},$$

so reducirt er sich auf:

$$x - x' = \frac{PA^3}{12\varepsilon}\left(3\sin\varphi - 3\varphi\cos\varphi + \sin^3\varphi - \frac{8}{\pi}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\right).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach φ und setzt das erste Differential-Verhältnifs $= o$ so erhält man

$$\varphi = \frac{16}{3\pi}\sin\varphi - \cos\varphi,$$

welcher Gleichung Genüge geleistet ist, wenn man darin:

$\varphi = 1{,}10$ oder Winkel $\varphi = 63^\circ$, $\sin\varphi = 0{,}89$, $\cos\varphi = 0{,}45$ setzt

Der die gröfste Verschiebung in der Horizontale erleidende Punkt des Bogens ist von der Verticale also um 63° entfernt.

Die Gröfse der horizontalen Verschiebung D wird erhalten, wenn man für φ seinen eben gefundenen Werth in die letzte Gleichung für $x' - x$ setzt, und man findet auf solche Weise

$$D = 0{,}0053\,\frac{PA^3}{\varepsilon},$$

und für einen Bogen mit rechtwinkligem Querschnitte wird:

$$D = 0{,}1044\,\frac{PA^3}{Eab^3}.$$

Der in Nr. 45 gefundene Werth von f war

$$f = 0{,}014\,\frac{PA^3}{\varepsilon},$$

welcher für einen Bogen mit rechtwinkligem Querschnitte wird

$$f = 0{,}168\,\frac{PA^3}{Eab^3}, \qquad \text{also} \qquad D = 0{,}62\,f.$$

Zur Berechnung des Querschnitts des Bogens mufs man die beiden Glieder der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\,\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} \quad \text{(Nr. 17)}$$

näher zu bestimmen suchen.

Betrachtet man irgend einen Punkt m des Bogens, so wird die Spannung T in diesem Punkte des Bogens erhalten, wenn man die verschiedenen Kräfte, denen der Theil mC ausgesetzt ist, nach der Tangente an dem Punkte m der Curve zerlegt und diese Composanten summirt. Nun ist der Winkel der Tangente mit der Horizontale φ, und man wird defshalb erhalten:

$$T = -P\sin\varphi + Q\cos\varphi + pA\sin\varphi(\sin\Phi - \sin\varphi),\ ^{*})$$

*) Der Autor hat hier einen Zeichenfehler gemacht, indem dieser Werth für T heifsen mufs:

$$T = +P\sin\varphi + Q\cos\varphi + pA\sin\varphi(\sin\Phi - \sin\varphi).$$

Verfährt man mit dieser Gleichung wie mit der obigen im Texte, so wird der dem Maximum von T entsprechende Werth von φ ein anderer, und man erhält nach gehöriger Umformung schliefslich $T = \frac{5}{4}\frac{P}{\Phi}$, welcher Werth eigentlich statt des im Texte $T = \frac{P}{\Phi}$ zu substituiren ist. Indessen hat diese Aenderung auf die Berechnung des

welches für $pA \sin \Phi = P$, $Q = \frac{P}{\Phi}$, welche Werthe für den Fall gültig sind, wo man einen sehr flachen Bogen betrachtet, wird zu

$$T = -P\left(\frac{\sin^2 \varphi}{\sin \Phi} - \frac{\cos \varphi}{\Phi}\right).$$

Den zum Maximum dieses Ausdrucks gehörigen Werth von φ erhält man durch die Gleichung:

$$\frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \Phi} + \frac{\sin \varphi}{\Phi} = o, \quad \text{woraus} \quad \varphi = o \quad \text{und} \quad T = \frac{P}{\Phi}.$$

Der Werth von $V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ ist für einen Kreisbogen von geringem Pfeil, indem man ebenfalls $pA \sin \Phi = P$, und $Q = \frac{P}{\Phi}$ setzt:

$$V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{VA}{\varepsilon}\left[-P\left(\frac{\sin \Phi}{2} - \frac{\sin^2 \varphi}{2 \sin \Phi} - \frac{1}{\Phi}(\cos \varphi - \cos \Phi)\right)\right].$$

Den zum Maximum dieses Ausdrucks gehörenden Werth von φ erhält man durch die Gleichung:

$$\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin \Phi} + \frac{\sin \Phi}{\Phi} = o \quad \text{woraus} \quad \varphi = o,$$

und danach:

$$V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{VPA}{2\varepsilon}\left(\sin \Phi - 2 . \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi}\right).$$

Man hat also endlich für einen gedrückten Bogen von nicht grofsem Pfeil.

$$\frac{R'}{E} = P\left[\frac{1}{\Phi E \Omega} + \frac{VA}{2\varepsilon}\left(\sin \Phi - 2 . \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi}\right)\right]. \quad \text{(Nach Anhang Nr. 17.)}$$

Handelt es sich um einen Viertelkreisbogen, so erhält man, wenn man $P = pA$ und $Q = \frac{4P}{3\pi}$ macht:

$$T = P\left[\sin^2 \varphi + \frac{4 \cos \varphi}{3\pi}\right] \quad \text{und} \quad V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{VPA}{\varepsilon}\left(\frac{4 \cos \varphi}{3\pi} - \tfrac{1}{2} \cos^2 \varphi\right),$$

daher:

$$\frac{R'}{E} = \frac{P}{E\Omega}\left(\sin^2 \varphi + \frac{4 \cos \varphi}{3\pi}\right) + \frac{VPA}{\varepsilon}\left(\frac{4 \cos \varphi}{3\pi} - \tfrac{1}{2} \cos^2 \varphi\right);$$

in welchem Ausdrucke man $\varphi = 1{,}10$, $\sin \varphi = 0{,}89$, $\cos \varphi = 0{,}45$ machen mufs, weil für diese Punkte die Biegung am gröfsten ist. Durch diese Substitution erhält man:

$$\frac{R'}{E} = P\left(\frac{1{,}36}{E\Omega} + \frac{VA}{\varepsilon} . 0{,}085\right),$$

Querschnitts der Bögen keinen grofsen Einflufs. Auch erstrecken sich die Folgen dieser Ungenauigkeit nur auf die eine Formel (A) Nr. 47 des Anhangs, Seite 133, und die daraus abgeleiteten, welche richtig heifsen mufs:

$$\frac{R'}{E} = P\left[\frac{5}{4E\Omega\Phi} + \frac{VA}{2\varepsilon}\left(\sin \Phi - 2 \times \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi}\right)\right].$$

Die übrigen Formeln der Nr. 46, 47 etc. sind durchaus genau. d. U.

und wenn der Bogen von rechtwinkligem Querschnitte ist:

$$ab^2 = \frac{P}{R'}(1{,}36\,b + 0{,}51\,A).$$

47) *Resultate der Rechnung über Biegung eines Bogens, der mit gleichförmig auf seinen Umfang vertheilten Gewichten belastet, an einem Ende eingemauert, am anderen von zwei Kräften P und Q beansprucht wird.*

In diesem Falle ist der Rechnungsweg ganz dem eben gemachten gleich, und man kann alle Bezeichnungen der Nr. 45 beibehalten, nur beobachte man, dafs p nicht mehr das von der Längeneinheit der Horizontal-Projection des Bogens getragene Gewicht, sondern jetzt die auf die Längeneinheit der Bogenlinie kommende Belastung bezeichnet. Nennt man also P die ganze vom Bogen getragene Belastung, so hat man hier $p\Phi A = P$. Auf diese Weise wird man finden:

1) für einen gedrückten Bogen

$$f = \frac{3PA^3\Phi^3}{20\varepsilon}, \qquad Q = \frac{P}{\Phi},$$

$$\frac{R'}{E} = P\left[\frac{1}{E\Omega\Phi} + \frac{VA}{2\varepsilon}\left(\sin\Phi - 2\,.\,\frac{1-\cos\Phi}{\Phi}\right)\right]; \qquad (A)$$

2) für einen Viertelkreisbogen (wenn also CA (Fig. 19) ein Viertelkreis ist):

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon}\,.\,\frac{5\pi^2 - 8\pi - 24}{8\pi} = 0{,}0088731\,\frac{PA^3}{\varepsilon},$$

$$Q = \frac{4P}{4\pi} = 0{,}3181\,P, \qquad D = 0{,}0053\,\frac{PA^3}{\varepsilon} = 0{,}62\,f,$$

$$\frac{R'}{E} = P\left(\frac{1{,}198}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\,.\,0{,}093\,A\right).$$

Für einen Bogen, dessen Querschnitt rechtwinklig ist, wird diese letzte Gleichung:

$$ab^2 = \frac{P}{R'}(1{,}198\,b + 0{,}54\,A).$$

48) 2. *Resultate der Rechnung, wenn die am Bogen angreifenden Kräfte sich auf die beiden Kräfte P und Q reduciren.* Vernachlässigt man das Gewicht des Bogens, setzt also $p = o$, so kommt:

1) für einen gedrückten Bogen:

$$f = \frac{PX^3}{\varepsilon}\left(\frac{1}{128} - \frac{3X^2}{20A^2}\right), \qquad Q = \frac{25}{32}\,.\,\frac{PA}{X},$$

$$\frac{R'}{E} = P\left[\frac{1}{E\Omega\Phi} + \frac{V}{\varepsilon}\,.\,A\left(\sin\Phi - \frac{25}{16}\,.\,\frac{1-\cos\Phi}{\Phi}\right)\right]; \text{ (Aus Anhang Nr. 17)}$$

2) für einen Viertelkreisbogen:

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon}\,.\,\frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{4\pi} = \frac{0{,}037\,PA^3}{\varepsilon}, \qquad Q = \frac{2P}{\pi} = 0{,}6363\,P,$$

$$D = 0{,}021\,.\,\frac{PA^3}{\varepsilon} = 0{,}59\,f, \qquad \frac{R'}{E} = P\left(\frac{1{,}185}{E\Omega} + 0{,}185\,\frac{VA}{\varepsilon}\right).$$

Wenn der Bogen einen rechtwinkligen Querschnitt hat:

$$ab^2 = \frac{P}{R'}(1{,}185\,b + 1{,}110\,A).$$

49) *Formeln zur Berechnung des Querschnitts der gedrückten Bögen.* Die Formel (A) in Nr. 47

$$\frac{R'}{E} = P\left[\frac{1}{E\Omega\Phi} + \frac{VA}{2\varepsilon}\left(\sin\Phi - 2\,.\,\frac{1-\cos\Phi}{\Phi}\right)\right],$$

diente sowohl zur Berechnung des Querschnitts der gedrückten Bögen, welche gleichförmig auf ihrem Umfange belastet sind, als auch des Querschnitts der gedrückten Bögen mit gleichförmiger Belastung auf ihrer Horizontal-Projection, wobei die Bedeutung der Bezeichnungen dieselbe wie in Nr. 45 bis 47 ist.

Entwickelt man $\sin\Phi$ und $\cos\Phi$ nach Potenzen von Φ und vernachlässigt man die fünften Potenzen, so findet man:

$$\frac{VA}{2\varepsilon}\left(\sin\Phi - 2\frac{1-\cos\Phi}{\Phi}\right) = -\frac{VA\Phi^3}{24\varepsilon}.$$

Aber nach der Bemerkung in Nr. 34 mufs dieser Ausdruck, der die von der Biegung herrührende Verlängerung oder Verkürzung der Fasern bezeichnet, immer das $+$ Zeichen erhalten, unsere Formel wird also:

$$\frac{R'}{E} = P\left(\frac{1}{E\Omega\Phi} + \frac{VA\Phi^3}{24\varepsilon}\right),$$ und setzt man $\frac{1}{\Phi} = M$, $\Phi^3 = N$, so wird

$$\frac{R'}{E} = P\left(\frac{M}{E\Omega} + \frac{NVA}{24\varepsilon}\right).$$

Um die Berechnung dieser Formel zu erleichtern, geben wir nachstehend die Werthe von $\frac{1}{\Phi}$ und von Φ^3, welche den bekannten Werthe des Verhältnisses $\frac{X}{Y}$, als dem Verhältnisse der halben Weite des Bogens zu seinem Pfeil oder seiner Steigung entsprechen.

Werthe von							
$\frac{X}{Y}$ . . .	2,	3,	4.	5.	10,	15,	20.
M . . .	1,0800,	1,530,	2,040,	2,660,	6,660,	7,630,	9,520.
N . . .	0,7915,	0,263,	0,117,	0,053,	0,034,	0,022,	0,001.

Im §. 10 Cap. IX der Abhandlung findet man Anwendungen dieser Formel auf Kreisbögen, deren Querschnitt ein Rechteck oder eine Röhre mit elliptischem Querschnitte ist. (Nr. 6 bis 14.)

50) *Berechnung der Querschnitte des einfachen geraden Gespärres.* (Taf. XIV.)

Die einfachste Weise, die Formeln zur Berechnung der Querschnitte der verschiedenen Theile des einfachen geraden Gespärres, wie es auf Taf. XIV. dargestellt ist, aufzustellen, besteht darin, den Sparren an seinen beiden Enden aufliegend und mit einem auf seine Länge verbreiteten Gewicht P belastet anzunehmen. Den Pfosten denke man sich als durchaus fest in seinem Vereinigungspunkte mit dem Sparren verbunden (also wie in D', Taf. XIV., eingemauert), durch den Schub des Gespärres Q, an seinem unteren Ende angreifend, gebogen und gleichzeitig durch das Gewicht P, mit welchem das halbe Gespärre belastet ist, zusammendrückt.

Bezeichnen wir die Länge des Sparrens mit X, mit Ω die Fläche seines Querschnitts, und nennen ω den Winkel, welchen er mit der Verticale einschliefst,

und zerlegen jetzt das auf seine Länge verbreitete Gewicht P in zwei andere Kräfte, von denen die eine $P\cos\omega$ parallel zur Richtung des Sparrens, die andere $P\sin\omega$ normal auf die Richtung desselben ist.

Dies vorausgesetzt, weifs man noch, dafs nach den in Nr. 24 und 27 gemachten Bemerkungen der Einflufs der Kraft $P\cos\omega$ auf Biegung des Sparrens vernachlässigt werden kann. Berücksichtigt man also nur die Kraft $P\sin\omega$, so wird man den Sparren wie horizontal auf zwei Stützpunkten liegend und auf seiner Länge mit einem gleichförmig verbreiteten Gewichte $P\sin\omega$ belastet, betrachten können.

Ein horizontal auf zwei Stützpunkten ruhendes und mit $P\sin\omega$ belastetes Prisma drückt jeden seiner Stützpunkte mit einer Kraft $\frac{P\sin\omega}{2}$, und da zudem zu beiden Seiten der Mitte des Prismas Alles symmetrisch ist, so bleibt bei der Biegung die Tangente an diesem Punkte der entstehenden Curve horizontal; man kann daher, indem man die Stützpunkte durch den oben erwähnten Pressungen gleiche aber entgegenwirkende Kräfte ersetzt, das Prisma sich denken: 1 wie in seiner Mitte eingemauert, 2 an seinem Ende durch eine Kraft $\frac{P\sin\omega}{2}$, die von unten nach oben wirkt, beansprucht und 3 mit dem gleichförmig über die Länge $\frac{X}{2}$ des Prismas verbreiteten Gewichte $\frac{P\sin\omega}{2}$ belastet.

Die Gleichgewichtsbedingung in Bezug auf die Biegung wird demnach sein:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P\sin\omega}{2}\left(\frac{X}{2} - x\right) + \frac{P\sin\omega}{X}\left(\frac{X^2}{8} - \frac{Xx}{2} - \frac{x^2}{2}\right),$$

woraus man erhält, weil für den Befestigungspunkt also für $x = o$ die gröfste Biegung Statt findet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{PX\sin\omega}{8\,\varepsilon}.$$

Kommen wir jetzt zu der Kraft, die den Sparren zusammenzudrücken sucht, so ist sie am oberen Ende gleich Null, am unteren Ende ist sie gleich $P\cos\omega$. In der Mitte des Sparrens würde sie $\frac{P\cos\omega}{2}$ sein, und da wir für diesen Punkt desselben den Querschnitt auch bei der Biegung berechnet haben, so konnen wir setzen:

$$T = \frac{P\cos\omega}{2\Omega},$$

und demgemäfs wird die Gleichung zur Berechnung des Querschnitts des Sparrens sein

$$\frac{R'}{E} = \frac{P\cos\omega}{2E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon}\,\frac{PX\sin\omega}{8}.\quad \text{Nach Anhang Nr. 17.}$$

Ist der Sparren von rechteckigem Querschnitt, und bezeichnet l die Breite und h die Höhe seines Querschnitts, so wird man erhalten, wenn man nach der Bezeichnung in Nr. 42. $X\sin\omega = a$ setzt:

$$lh^2 = \frac{P}{R'}\left(\frac{h\cos\omega}{2} - \frac{3}{4}a\right). \qquad 1$$

Nach den Annahmen die über die Kräfte, denen der Pfosten (die Stuhlsäule) Widerstand leistet, gemacht sind, gelangt man unmittelbar nach (A) in Nr. 23 zu der Formel:

$$\frac{R'}{E} = \frac{P}{E\Omega} + \frac{V}{\varepsilon} QX,$$

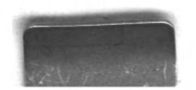
und ist hier $X = b'$ der Nr. 42.

Wenn der Querschnitt des Prismas ein Rechteck ist, dessen Breite l und dessen Höhe h ist, bekommt man:

$$lh^2 = \frac{Ph + 6Qb'}{R'}. \qquad (2)$$

Nimmt man R' zu 700 000[k] und setzt in (1) und (2) für a und b' die in Nr. 43 berechneten Werthe, so erhält man die in der Tabelle §. 5 Cap. IX gegebenen Formeln.

Ende des Anhangs.




Digitized by Google